Enunţ: *Fie* $G \subset \mathbb{R}$ *o mulţime care satisface simultan proprietăţile:*

a) $1 \in G$;

b) dacă $x \in G$ *atunci* $\sqrt{x+2} \in G$;

c) dacă $\sqrt{x+3} \in G$ *atunci* $(x+4) \in G$.

Arătaţi că $\sqrt{2022} \in G$.

Soluţie. Dacă $1 \in G \Rightarrow \sqrt{3} \in G$. Apoi $0+3 \in G \Rightarrow 4 \in G \Rightarrow \sqrt{6} \in G \Rightarrow 7 \in G \Rightarrow 3 \in G$. Pe de altă parte avem şi $1 = \sqrt{-2+3} \in G \Rightarrow 2 \in G$. Pentru $n \geq 3$, presupunem că $1, 2, 3, ..., n \in G$ şi astfel avem $(n-2) \in G \Rightarrow \sqrt{n} \in G$ sau $\sqrt{n-3+3} \in G$, de unde deducem că $(n+1) \in G$. Am demonstrat astfel prin inducţie că mulţimea G conţine toate numerele naturale nenule. Cum $2020 \in G$, folosind b), ajungem la $\sqrt{2020} \in G$. $\square$