COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2014
FAZA LOCALĂ A JUDEŢULUI MEHEDINŢI

ABSTRACT. Comments on some of the problems presented at the Local Round of the National Mathematics Olympiad 2014, Mehedinţi.

Se adresează claselor V – XII.
Data: 21 februarie 2014.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Aceste comentarii asupra Fazei Locale a Olimpiadei de Matematică 2014 a judeţului Mehedinţi,[1] reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectivă a probelor de concurs.[2]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

2. Clasa a V-a

Subiectul (III). *Se împarte la* 11 *numărul* $7^{n+1} + 4 \cdot 7^n + 17$, *unde* n *este un număr natural.*

a) Să se determine câtul şi restul împaărţirii.

b) Să se determine ultimele două cifre ale câtului, dacaă n *este un numaăr natural multiplu de* 4.

Soluţie. a) $7^{n+1} + 4 \cdot 7^n + 17 = 7^n(7 + 4) + (11 + 6) = 11(7^n + 1) + 6$.

b) $7^4 - 1 = 2400$, deci $7^n + 1 = (7^4)^{n/4} + 1 \equiv 02 \pmod{100}$. □

3. Clasa a VI-a

Subiectul (I). *b) Arătaţi că numărul* $6^{3n+2} + 6^{3n+1} + 1$ *se divide cu* 43, $\forall n \in IN$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Soluţie. Din moment ce $43 \mid 6^3 - 1$, rezultă $6^{3n+2} + 6^{3n+1} + 1 \equiv 6^2 + 6 + 1 = 43 \equiv 0 \pmod{43}$. Alternativ, prin inducţie ($n = 0$ e verificat mai sus), avem

$$6^{3(n+1)+2} + 6^{3(n+1)+1} + 1 = 6^3(6^{3n+2} + 6^{3n+1} + 1) - (6 - 1)(6^2 + 6 + 1).$$

Care metodă este de preferat? *de gustibus ...* □

[1] Din plictiseală, şi alte motive ... personale, am ales şi acest judeţ în care nu locuiesc.

[2] Lipsesc multe probleme, la care nu am găsit interesul de a fi prezentate. Le găsiţi pe toate (fără soluţii, nici bareme), precum şi alte judeţe (schimbând sufixul), la

`http://ssmr.ro/files/onm2014/faza_locala/subiecte/Mehedinti.rar`

Remarcă. De fapt, întotdeauna polinomul $P(x) = x^{3n+2} + x^{3n+1} + 1$ se divide cu $Q(x) = x^2 + x + 1$. Aceasta este deoarece

$$P(x) = (x^2 + x + 1)x^{3n} - ((x^3)^n - 1),$$

şi $Q(x) \mid x^3 - 1 \mid (x^3)^n - 1$. Deci $43 = Q(6) \mid P(6)$ şi tot misterul s-a disipat.

Subiectul (II)**.** *Să se determine $m, n \in IN^* \ \mathbb{N}^*$ astfel încât:*

$$1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \cdots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = m^{2014}.$$

Soluţie. La acelaşi preţ, se putea cere să se rezolve $S_n = \sum_{k=1}^{n} k! = m^\ell$, cu $\ell > 1$ întreg. Consideraţii modulo puteri ale lui 2 nu ne duc prea departe, dar modulo puteri ale lui 3, *we strike gold*. Avem $S_1 = 1$, $S_2 = 3$, $S_3 = 3^2$, $S_4 = 3 \cdot 11$, $S_5 = 3^2 \cdot 17$, $S_6 = 3^2 \cdot 97$, $S_7 = 3^4 \cdot 73$, $S_8 = 3^2 \cdot 11 \cdot 467$, şi $3^2 \mid S_n$ dar $3^3 \nmid S_n$ pentru $n \geq 9$. Aceasta arată că, în afară de soluţiile $\boxed{(n, m, \ell) = (1, 1, \ell)}$ şi $\boxed{(n, m, \ell) = (3, 3, 2)}$ (iar la problema iniţială, doar $\boxed{n = m = 1}$), trebuie $n \geq 9$ şi $\ell = 2$. Dar pentru $n \geq 4$ ultima cifră a lui S_n este 3, deci S_n nu poate fi pătrat perfect, şi *a fortiori* putere 2014.[3]

Folosirea numărului 2014 nu face decât să mascheze problema într-un monstru, iar Halloween a trecut ... poate se gândeau la Dragobete? □

Remarcă. Definind $!n = 1 + S_{n-1}$ (numit şi *left-factorial*), lumea se întreabă dacă $!n \not\equiv 0 \pmod{n}$ pentru toţi $n > 2$. Conjectura echivalentă, care afirmă $\text{cmmdc}(!n, n!) = 2$, este încă deschisă. Având $S_n = !(n+1) - 1$, se arată că $9 \mid S_n$ pentru $n \geq 5$ (vezi mai sus), şi $99 \mid S_n$ pentru $n \geq 10$ (alte astfel de congruenţe nu subt cunoscute). Este conjecturat şi faptul că $!n$ este liber de pătrate pentru $n > 3$.[4]

Subiectul (IV)**.** *Avem la dispoziţie un raportor care are o singură gradaţie la $19°$. Să se arate că utilizând acest raportor putem construi orice unghi având măsura $1°, 2°, 3°, \ldots, 359°$. De câte utilizări ale raportorului este nevoie pentru a desena un unghi de $60°$?*

Soluţie. Deoarece $\text{cmmdc}(19, 360) = 1$, din relaţia lui Bézout există numere întregi pozitive u şi v, astfel ca $19u - 360v = 1$. Utilizând raportorul de ku ori, putem deci desena un unghi de $k°$. Pentru a găsi valoarea minimă pentru $k = 60$, scriem $19r - 360s = 60$, deci $60 \mid r$, aşadar $r = 60t$, şi atunci $19t - 6s = 1$, cu soluţia minimă $(t, s) = (1, 3)$, deci avem nevoie de $\boxed{r = 60}$ utilizări ale raportorului. □

[3] Sume de factoriali "pe sărite" pot fi pătrate perfecte; vezi
`http://mathworld.wolfram.com/FactorialSums.html`

[4] [R. K. GUY – *Unsolved Problems in Number Theory*], **B44**.

4. CLASA A VII-A

Subiectul (I). *a) Să se arate că* $\sqrt{2014 \cdot 2015} \notin$ **N** $\mathbb{N}$.

b) Determinaţi un număr raţional $p \in$ **Q** $\mathbb{Q}$ *astfel încât*

$$\sqrt{2014 \cdot 2015 + p} \in \mathbf{Q}\ \mathbb{Q}.$$

Soluţie. Puţin cam revoltător. Punctul a) se face la clasă. Pentru punctul b) luăm $p = -2014 \cdot 2015$, sau $p = 2015$, sau o mie de alte valori ... cu forma cea mai generală $p = k^2 - 2014 \cdot 2015$, pentru $|k| \in \mathbb{Q}$ arbitrar. □

Subiectul (II). *Să se rezolve în* **Z** $\mathbb{Z}$ *ecuaţia:*

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{1}{(x+2013)(x+2014)} = \frac{2014}{2015}.$$

Soluţie. Descompunerea $\dfrac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \dfrac{1}{x+k} - \dfrac{1}{x+k+1}$, care ne permite telescoparea $\displaystyle\sum_{k=0}^{2013} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2014} = \frac{2014}{x(x+2014)}$, se face şi ea (probabil – aşa ar trebui) la clasă. Ajungem aşadar la ecuaţia $x(x+2014) = 2015$, cu soluţiile $\boxed{x = 1}$ şi $\boxed{x = -2015}$. Deoarece oricum soluţiile sunt întregi, specificaţia "în $\mathbb{Z}$" din enunţ este superfluă. □

5. CLASA A VIII-A

Subiectul (I). *Fie, pentru* $n \in N^* \ \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{3 + 2\sqrt{1 \cdot 2}}} + \frac{1}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2 \cdot 3}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}}}.$$

Să se calculeze: $1 + S_{2014}$.

Soluţie. Presupun că se face la clasă formula radicalilor suprapuşi

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}},$$

pentru orice numere reale $0 \leq a$, $b \leq a^2$. Atunci, pentru $a = 2k + 1$ şi $b = 4k(k+1)$, avem $a^2 - b = (2k+1)^2 - 4k(k+1) = 1$, şi deci

$$\sqrt{2k + 1 + 2\sqrt{k(k+1)}} = \sqrt{k+1} + \sqrt{k},$$

aşadar

$$\frac{1}{\sqrt{2k + 1 + 2\sqrt{k(k+1)}}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k},$$

şi putem telescopa $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k + 1 + 2\sqrt{k(k+1)}}} = \sqrt{n+1} - 1$, prin urmare $\boxed{1 + S_{2014} = \sqrt{2015}}$. O adevărată pasiune pentru anul curent ... □

Subiectul (II)**.** *Fie mulţimile*

$$A = \left\{ \left\lfloor n\sqrt{2} \right\rfloor \mid n \in N^* \ \mathbb{N}^* \right\} \ \text{şi}\ B = \left\{ \left\lfloor (2+\sqrt{2})n \right\rfloor \mid n \in N^* \ \mathbb{N}^* \right\},$$

unde $\lfloor x \rfloor$ *reprezintă partea întreagă a lui* x*. Calculaţi* $A \cap B$*.*

Soluţie. O glumă!?! (sau o neatenţie, crezând că această problemă dintr-o G.M.-B. recentă are o soluţie simplă, rapidă, elementară). În ce univers se dă la etapa locală, clasa a VIII-a, problema 2/4, un caz particular al teoremei Beatty/Rayleigh,[5] care afirmă că pentru numere iraţionale pozitive r şi s, cu $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$, mulţimile $\mathcal{B}_r = \{\lfloor nr \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ şi $\mathcal{B}_s$ formează **o partiţie** a lui $\mathbb{N}^*$. Numerele $\sqrt{2}$ şi $2+\sqrt{2}$ verifică, deci $\boxed{A \cap B = \emptyset}$. □

6. Clasa a IX-a

Subiectul (I)**.** *a) Se consideră mulţimea* $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2014\}$ *şi mulţimile* $A = \{2a-1 \mid a \in \mathbb{N}\} \cap M$*,* $B = \{3b-1 \mid b \in \mathbb{N}\} \cap M$ *şi* $C = \{5c-1 \mid c \in \mathbb{N}\} \cap M$*. Să se calculeze* $\operatorname{card} A$, $\operatorname{card} B$ *şi* $\operatorname{card} C$*.*

b) Fie a, b, c *şi* d *numere reale pozitive astfel încât:* $a+b+c+d = 1$*. Să se arate că:* $a^2b^2 + c^2d^2 \leq \dfrac{1}{16}$*.*

Soluţie. a) Pentru o mulţime $K = \{nk-1 \mid k \in \mathbb{N}\} \cap M$, avem şi $K+1 = \{nk \mid k \in \mathbb{N}\} \cap N$, unde $N = M+1 = \{1,2,\ldots,2015\}$. Dar numărul multiplilor lui n din N este $\left\lfloor \dfrac{2015}{n} \right\rfloor$, deci $\operatorname{card} K = \operatorname{card}(K+1) = \left\lfloor \dfrac{2015}{n} \right\rfloor$.
b) Avem $a^2b^2 + c^2d^2 \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4 + \left(\dfrac{c+d}{2}\right)^4 \leq \dfrac{(a+b)+(c+d)}{16} = \dfrac{1}{16}$. Am folosit inegalitatea mediilor, şi faptul că $x^4 \leq x$ pentru $x \in [0,1]$; egalitate se obţine, evident, doar pentru $a = b = 0$ şi $c = d = \dfrac{1}{2}$ sau vice-versa. □

Subiectul (II)**.** *Să se rezolve ecuaţia:* $\lfloor x^2 \rfloor - 4\lfloor x \rfloor + 3 = 0$*, unde* $\lfloor x \rfloor$ *reprezintă partea întreagă a numărului real* x*.*

Soluţie. Fie $k = \lfloor x \rfloor$ şi $\varepsilon = \{x\}$. Avem deci $k^2 + \lfloor 2k\varepsilon + \varepsilon^2 \rfloor - 4k + 3 = 0$, şi prin urmare $k^2 + (2k\varepsilon + \varepsilon^2 - 1) - 4k + 3 < 0$, adică $k^2 - 2(2-\varepsilon)k + \varepsilon^2 + 2 < 0$. Trebuie deci $0 < 2 - \varepsilon - \sqrt{2-4\varepsilon} < k < 2 - \varepsilon + \sqrt{2-4\varepsilon} < 4$. Prin urmare, singurele posibilităţi sunt $k \in \{1,2,3\}$ (şi în plus $\varepsilon \leq 1/2$).

- $k = 1$ duce la $\lfloor 2\varepsilon + \varepsilon^2 \rfloor = 0$, deci $1 \leq (1+\varepsilon)^2 < 2$, şi $\varepsilon \in [0, \sqrt{2}-1)$.
- $k = 2$ duce la $\lfloor 4\varepsilon + \varepsilon^2 \rfloor = 1$, deci $5 \leq (2+\varepsilon)^2 < 6$, şi $\varepsilon \in [\sqrt{5}-2, \sqrt{6}-2)$.
- $k = 3$ duce la $\lfloor 6\varepsilon + \varepsilon^2 \rfloor = 0$, deci $9 \leq (3+\varepsilon)^2 < 10$, şi $\varepsilon \in [0, \sqrt{10}-3)$.

Deoarece toate sunt permise, avem $\boxed{x \in [1, \sqrt{2}) \cup [\sqrt{5}, \sqrt{6}) \cup [3, \sqrt{10})}$.
Nimic special, doar plictisitoare calcule ... □

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Beatty_sequence

Subiectul (IV)**.** *Într-un text fără semne diacritice sau de punctuaţie, şi fără majuscule la schimb de propoziţie, se cere "să se arate vectorial" teorema lui Menelaus, în forma ei clasică (de manual)!*

7. CLASA A X-A

Subiectul (II)**.** *a) Determinattţi $a \in IR\ \mathbb{R}$, sştiind caă:*

$$(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) = (t^2 - 5t + a)^2 - 1,$$

pentru orice $t \in IR\ \mathbb{R}$.

b) Saă se rezolve ecuattţia $(10^x - 1)(10^x - 2)(10^x - 3)(10^x - 4) + 1 = 0.$

Soluţie. Mai multă mură-n-gură rar am văzut. Toată lumea a întâlnit la un moment dat manipulările[6]

$$(t-1)(t-4) = ((t-5/2)+3/2)((t-5/2)-3/2) = (t-5/2)^2 - 9/4,$$

$$(t-2)(t-3) = ((t-5/2)+1/2)((t-5/2)-1/2) = (t-5/2)^2 - 1/4,$$

de unde

$$(t-1)(t-2)(t-3)(t-4) = ((t-5/2)^2 - 5/4)^2 - 1 = (t^2 - 5t + 5)^2 - 1.$$

Aşadar pentru punctul a) obţinem $\boxed{a = 5}$, iar ecuaţia de la punctul b) devine (pentru $t = 10^x$) $(10^x)^2 - 5 \cdot 10^x + 5 = 0$, de unde $\boxed{x = \log_{10} \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}}$. □

Subiectul (IV)**.** *Consideraăm numaărul complex $z = \cos 10° + i \sin 10°$.*

a) Saă se arate caă $\dfrac{z^{14}+1}{z^7} = 2\cos\dfrac{7\pi}{18}$.

b) Saă se calculeze suma:

$$S = \left\lfloor \frac{2014(z^2+1)}{z} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2014(z^4+1)}{z^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2014(z^6+1)}{z^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2014(z^{36}+1)}{z^{18}} \right\rfloor,$$

unde $\lfloor t \rfloor$ reprezintaă partea iîntreagaă a numaărului real t.

Soluţie. a) Formula lui de Moivre ne dă $z^k = \cos\dfrac{k\pi}{18} + \mathrm{i}\sin\dfrac{k\pi}{18}$ pentru orice k întreg, deci $z^7 + z^{-7} = 2\cos\dfrac{7\pi}{18}$.

b) Tot aşa, avem $\dfrac{2014(z^{2k}+1)}{z^k} = 4028\cos\dfrac{k\pi}{18}$ pentru $k = 1, 2, \ldots, 18$. Avem $\cos\dfrac{6\pi}{18} = -\cos\dfrac{12\pi}{18} = \dfrac{1}{2}$, $\cos\dfrac{9\pi}{18} = 0$ şi $\cos\dfrac{18\pi}{18} = -1$, ceea ce permite calcularea a patru dintre termenii sumei S.

[6]Iar dacă nu, brutala expansiune şi identificarea coeficienţilor duce, poate mai încet, la acelaşi rezultat. De fapt, dacă luăm de bună afirmaţia **"ştiind că"**, este suficient să facem $t = 5$ pentru a obţine $a^2 = 24 + 1 = 25$, şi apoi $t = 1$ pentru a obţine $(a-4)^2 = 1$, de unde $\boxed{a = 5}$. Să fi fost oare aceasta intenţia propunătorilor? ... cam ciudat. Ei bine, baremul oficial (de care am făcut rost) acceptă această metodă; brrr ...

Acum, puţină atenţie, domnilor! În afară de cazurile de mai sus însă, este notoriu (dar **deloc elementar**) faptul că valoarea cosinusului unui multiplu raţional de π **nu** este un număr raţional.

Aşadar, pentru $k \in \{10, 11, 13, 14, 15, 16, 17\}$, avem ca număr iraţional $\cos \frac{k\pi}{18} = -\cos \frac{(18-k)\pi}{18}$. Deoarece pentru orice număr x real, dar nu întreg, avem $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$, înseamnă că, ţinând cont de toate cele de mai sus, $\boxed{S = -7 - 4028 = -4035}$.

Sunt extrem de curios cu ce argumente "de clasă" se poate tranşa valoarea cerută? Am aflat! Baremul oficial (de care am făcut rost) presupune – fără justificare – că, în afară de $k = 9$ şi $k = 18$, avem $4028 \cos \frac{k\pi}{18} \notin \mathbb{Z}$ pentru ceilalţi $1 \leq k < 18$ (omiţând cazurile $k = 6$ şi $k = 12$), şi astfel ajunge chiar la valoarea eronată -4036 (plus o altă eroare de semn, *lost in the wash*). $\square$

8. Clasa a XI-a

Subiectul (II). *Fie $a \in IR^*_+$ $\mathbb{R}^*_+$ şi $n \in IN$ $\mathbb{N}$, $n \geq 2$.*

a) Să se arate că $\lfloor a \rfloor + \left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2a \rfloor$.

b) Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 2}$, dat prin $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor a + \frac{k}{n} \right\rfloor$ *pentru $n \geq 2$ este convergent. ($\lfloor x \rfloor$ este partea întreagă a lui x)*

Soluţie. Arhi-cunoscuta identitate a lui Hermite este $\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$, pentru orice număr real x şi orice întreg pozitiv n. Prin urmare punctul a) este cazul $n = 2$, iar pentru punctul b) ajungem la $x_n = \frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n}$. Din cleştele $\frac{na}{n} < \frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n} \leq \frac{na + 1}{n}$ obţinem $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Nu prea înţeleg motivul definirii $(x_n)_{n\geq 2}$, de parcă x_1 n-ar avea sens; de asemenea restricţionarea la $a > 0$. Baremul conţine o eroare (benignă, dar eroare). $\square$

Subiectul (III). *Fie $A \in M_2(IR)$ $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi propoziţiile*

(p) : $\mathrm{tr}(A) = 1$; ($\mathrm{tr}(A)$ *este suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A*)

(q) : $\det(A) = 2$;

(r) : $\det(A + I_2) = 4$.

Să se arate că dacă două dintre propoziţii sunt adevărate, este şi adevărată şi a treia.

Soluţie. Pentru $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avem $t = \mathrm{tr}(A) = a + d$, $\Delta = \det(A) = ad - bc$ şi $\Lambda = \det(A + I_2) = (a+1)(d+1) - bc = \Delta + t + 1$. Relaţia $\Lambda = \Delta + t + 1$ spune totul. Nu mai înţeleg chiar nimic din rostul acestei probleme. $\square$

Subiectul (IV)**.** *Fie* $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. *Considerăm şirul* $(a_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $a_1 = \tan\alpha$ *şi* $a_{n+1} = a_n^2 \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$, *pentru* $n \geq 1$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - 1)$.

Soluţie. Considerând funcţia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = x^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$, avem $a_{n+1} = f(a_n)$, deci $a_{n+1} = f^n(a_1)$, unde f^n este a n-a iterată a lui f. Valoarea iniţială a lui a_1 este irelevantă, atât timp cât avem $1 < a_1 < \tan^2\alpha$ (ceea ce este cazul pentru $a_1 = \tan\alpha$), căci ecuaţia $f(x) = x$ are ca soluţii 1 şi $\tan^2\alpha$, şi teoria generală a astfel de şiruri ne dă faptul că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descrescător şi mărginit inferior de 1, deci convergent, iar limita lui este $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\limits_{n\geq 1} a_n = 1$. Dar atunci, deoarece $0 < \cos^2\alpha < \frac{1}{2}$, există $0 < \lambda < 1$ şi $N \in \mathbb{N}$, astfel ca $a_{N+k} + 1 < \frac{\lambda}{\cos^2\alpha}$ pentru $k \geq 0$. Cum putem scrie şi $a_{n+1} - 1 = (a_n^2 - 1)\cos^2\alpha$, avem prin iterare

$$0 < a_{N+n} - 1 = (a_N - 1)\prod_{k=0}^{n-1}\Big((a_{N+k} + 1)\cos^2\alpha\Big) < (a_N - 1)\lambda^n.$$

Dar $\lim\limits_{n\to\infty}(N+n)\lambda^n = 0$, ceea ce înseamnă că şi $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - 1) = 0$.[7]

Problema este disproporţionat de grea, faţă de celelalte alese. Nu-mi dau seama care au fost (dacă au fost) criteriile de selecţie. Problema (probabil dintr-o G.M.-B. recentă) a apărut postată pe AoPS încă din sfârşitul lui decembrie anul trecut (dar nu a primit soluţie). Unii copii întreprinzători au avut inspiraţia să încerce să obţină acolo ajutor, din timp ... □

9. Clasa a XII-a

Subiectul (I)**.** *Pe mulţimea* $\Re$ $\mathbb{R}$ *definim legea de compoziţie:*

$$x * y = \left(\sqrt[2015]{x} + \sqrt[2015]{y}\right)^{2015}.$$

Să se arate că $(\mathbb{R}, *)$ *este grup abelian şi că* $(\mathbb{R}, *) \simeq (\mathbb{R}, +)$.

Soluţie. Acelaşi obositor abuz al ideii de *transport de structură* ... Dacă avem o bijecţie $f\colon X \to G$, unde $(G, \circ)$ are structură de grup, şi dacă definim $x * y = f^{-1}(f(x) \circ f(y))$ pentru $x, y \in X$, atunci $(X, *)$ are structură de grup, izomorf (prin funcţia f) cu $(G, \circ)$. Acest lucru ne permite să evităm verificările plictisitoare de asociativitate, eventuală comutativitate, existenţă a elementului neutru şi a elementelor inverse. În cazul nostru, izomorfismul $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dat de $f(x) = \sqrt[2015]{x}$. □

[7] Nimic nu ne opreşte atunci să deducem chiar $\lim\limits_{n\to\infty} n^k(a_n - 1) = 0$, pentru **orice** întreg pozitiv k. Pentru a avea o şansă de a determina viteza de convergenţă a şirului, ar trebui să evaluăm $\lim\limits_{n\to\infty}\mu^n(a_n - 1) = 0$, unde $\mu = \frac{1}{2\cos^2\alpha} > 1$, deci să evaluăm limita şirului crescător $(b_n)_{n\geq 1}$, unde $b_n = \prod\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k + 1}{2}$. Dar acest lucru nu este uşor ...

Subiectul (II)**.** *Calculaţi:* $\displaystyle\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x + 2\cos x} dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, *fără a utiliza o schimbare de variabilă.*

Soluţie. Fie $A(x) = 2\sin x + 3\cos x$ şi $B(x) = 3\sin x + 2\cos x$. Avem atunci $B'(x) = -2\sin x + 3\cos x$, şi deci $A(x) = \dfrac{12B(x) + 5B'(x)}{13}$. Prin urmare

$$\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x + 2\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{A(x)}{B(x)}\mathrm{d}x = \frac{12}{13}\int \mathrm{d}x + \frac{5}{13}\int \frac{B'(x)}{B(x)}\mathrm{d}x,$$

aşadar expresia primitivei este $\dfrac{1}{13}(12x+5\ln(3\sin x+2\cos x))+C(\text{onstantă})$. Nu că schimbarea de variabilă ar fi folosit la mare lucru aici, dar întotdeauna am dezaprobat interzicerea unor metode de rezolvare. Iar personal, aş fi preferat să se ceară primitiva acelei funcţii, definită pe domeniul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, mai degrabă decât urmând prin $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ expresia primitivei. $\square$

Subiectul (III)**.** *Fie* $G = \left\{0, \frac{1}{2013}, \frac{2}{2013}, \ldots\ldots\ldots\ldots, \frac{2012}{2013}\right\}$. *Definim pe* G *legea de compoziţie* $x * y = \{x + y\}$, *unde* $\{x\}$ *este partea fracţionară a lui* x. *Să se arate că* $(G, *)$ *este grup abelian şi că* $(G, *) \simeq$ $(Z_{2013}, *)$ $(\mathbb{Z}_{2013}, +)$.

Soluţie. Ce ziceam oare mai sus? ... compus cu oribila omisiune de operaţie $(Z_{2013}, *)$, în loc de $(\mathbb{Z}_{2013}, +)$. În acest caz, izomorfismul $f\colon G \to \mathbb{Z}_{2013}$ este dat de $f\left(\frac{n}{2013}\right) = \widehat{n}$, pentru $n = 0, 1, \ldots, 2012$. $\square$

Subiectul (IV)**.** *Fie* $n \in$ N $\mathbb{N}$, $n \geq 3$, *şi*

$$I_n = \int_2^3 \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor dx,$$

unde $\lfloor x \rfloor$ *reprezintă partea întreagă a lui* x.

a) Să se calculeze I_3.

b) Să se arate că $\dfrac{5n-6}{2} \leq I_n \leq \dfrac{5n-4}{2}$.

Soluţie. Apare iarăşi identitatea lui Hermite $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x + \frac{k}{n}\right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$. Prin urmare integrandul este $\lfloor nx \rfloor - \lfloor x \rfloor$. Cum pe de o parte $\displaystyle\int_2^3 \lfloor x \rfloor \mathrm{d}x = 2$, iar pe de altă parte

$$\int_2^3 \lfloor nx \rfloor \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2+\frac{k}{n}}^{2+\frac{k+1}{n}} (2n + k)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2n+k}{n} = \frac{5n-1}{2},$$

obţinem $I_n = \dfrac{5n-1}{2} - 2 = \dfrac{5n-5}{2}$.

M-am lămurit şi de unde provine forma cu inegalităţi. Efortul de a folosi formula lui Hermite dovedindu-se prea obositor, ultimul pas a fost folosirea inegalităţii $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx$. Integrând, avem $\int_2^3 nx \, \mathrm{d}x = \frac{5n}{2}$, de unde cele două capete (şi transfigurarea lui $<$ în $\leq$ la prima inegalitate). Astfel explicitarea lui $\lfloor nx \rfloor$ prin partiţionarea domeniului de integrare (ca mai sus) s-a pierdut în ceaţă. □

Remarcă. Inegalitatea cerută este deci ridiculă, când o valoare **exactă** este atât de uşor de obţinut, şi cu atât mai neplăcute sunt semnele $\leq$ de inegalitate ne-strictă, care ar putea lăsa să se creadă că acele valori s-ar putea chiar atinge. Păcat ...

10. Încheiere

Folosirea scrierii în (probabil) Word, în loc de normalul astăzi LaTeX, pe lângă calitatea inestetică a formulelor, predispune şi la "scăpări" de semne diacritice, şi abuzuri de notaţie, ca N pentru mulţimea numerelor naturale, sau $\mathfrak{R}$ pentru mulţimea numerelor reale. Mă aşteptam de la un judeţ cu pretenţii, cum este Mehedinţi, la mai mult profesionalism, atât în ceea ce priveşte calitatea textului scris, cât şi cea a conţinutului său matematic, unde cel puţin câteva lucruri sunt de neacceptat.