

Etapa 7, Problema 4

Notăm cu \mathcal{F} mulțimea funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(f(x) + y) = f(x) + f(y), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Determinați funcțiile injective din \mathcal{F} .

b) Arătați că \mathcal{F} conține funcții neconstante care nu sunt nici injective, nici surjective.

Dorel Miheț

Soluție.

a) Relația din ipoteză conduce la

$$f(f(x) + y) = f(x) + f(y), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R} \text{ și}$$

$$f(f(y) + x) = f(y) + f(x), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Obținem imediat că

$$f(f(x) + y) = f(f(y) + x), \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Deoarece f este injectivă, rezultă că

$$f(x) + y = f(y) + x \Leftrightarrow f(x) - x = f(y) - y, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}.$$

Considerăm funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = f(t) - t$. Funcția g verifică relația $g(x) = g(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$. Există atunci $a \in \mathbb{R}$ pentru care $g(x) = a$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

În concluzie, funcțiile căutate sunt cele definite prin

$$f(x) = x + a.$$

b) De exemplu, funcția $f(x) = [x]$ aparține lui \mathcal{F} și nu este nici injectivă, nici surjectivă.