

Etapa 7, Problema 1

Câte numere de n cifre formate doar cu cifrele 1, 9, 8, 6 sunt divizibile cu 3?

DOREL MIHEȚ

Soluție.

Fie x_n numărul căutat; evident că $x_1 = 2$.

Dacă A este un număr de $n + 1$ cifre ca în enunț, suma primelor n cifre ale lui A poate fi de forma $3k$, $3k + 1$ sau $3k + 2$.

În cazul în care suma primelor n cifre este de forma $3k$, mai putem completa doar cu 6 sau 9, deci avem $2x_n$ posibilități de alegere pentru A .

Dacă suma primelor n cifre este de forma $3k + 1$, mai putem completa doar cu 8, iar dacă suma primelor n cifre este de forma $3k + 2$, mai putem completa doar cu 1. Cum există 4^n numere de n cifre formate cu cifrele 1, 9, 8, 6, vom avea $4^n - x_n$ numere A care nu au suma primelor n cifre divizibilă cu 3.

Obținem relația de recurență $x_{n+1} = x_n + 4^n$. Dând valori lui n și sumând egalitățile găsite, deducem că $x_n = 4^{n-1} + 4^{n-2} + \dots + 4^1 + x_1$, de unde

$$x_n = \frac{4^n - 4}{3} + 2.$$