PRINCIPIUL CUTIEI

ABSTRACT. În articolul de faţă este prezentat pricipiul cutiei şi sunt rezolvate câteva probleme cu ajutorul acestui principiu.

Lecţia se adresează clasi a V-a

Autor: Ion Cicu, Profesor, Şcoala nr. 96, Bucureşti

Acest principiu este mai mult o observaţie de bun simţ care, de-a lungul timpului s-a dovedit foarte utilă în rezolvarea unor probleme.

Se pare că pentru prima oară a fost utilizat de către matematicianul german Dirichlet. Din acest motiv i se mai spune şi principiul lui Dirichlet.

Dar care este acest principiu?

Mai întâi un mic exemplu.

Dacă aveţi trei mere pe care trebuie să le puneţi în două coşuri, atunci va trebui ca într-un coş să puneţi două mere.

Despre aceasta este vorba; dacă am mai multe obiecte de aşezat în mai puţine cutii, atunci într-o cutie trebuie să aşez mai multe obiecte.

Iată însă cum se enunţă acest principiu la modul general:

Dacă avem un număr N de cutii şi un număr $N+1$ de obiecte, atunci cel puţin într-o cutie vor fi două obiecte.

Să numerotăm cutiile cu

$$C_1, C_2, C_3, ..., C_N$$

şi obiectele cu

$$O_1, O_2, O_3, ..., O_N, O_{N+1}.$$

Să presupunem că în cutia C_1 se află obiectul O_1, în cutia C_2 obiectul O_2 şi aşa mai departe, în cutia C_N se află obiectul O_N. În acest fel am terminat cutiile, dar ne-a mai rămas un obiect. Ce facem cu el? Îl introducem într-o cutie unde se mai află deja un obiect. Aşadar, într-o cutie se vor afla două obiecte.

Prezentăm acum câteva exemple. Începem cu o problemă foarte simplă, dar utilă pentru a înţelege mecanismul după care funcţionează principiul cutiei.

Problema 1: Din trei numere naturale luate la întâmplare, cel puţin două au aceeaşi paritate.

Soluţie: Numerele naturale pot fi pare sau impare. Acestea sunt cutiile; o cutie pentru numere pare şi o cutie pentru numere impare. Obiectele sunt cele trei numere. Aşadar avem două cutii şi trei obiecte. Conform principiului cutiei, într-o cutie sunt cel puţin două obiecte. În concluzie, cel puţin două numere au aceeaşi paritate.

Problema 2: Dacă a, b, c sunt trei numere naturale, atunci unul dintre numerele $a+b$, $b+c$, $c+a$ este par.

Soluţie: Se ştie că suma a două numere de aceeaşi paritate este un număr par. În problemă avem trei numere şi conform problemei 1 cel puţin două dintre ele au aceeaşi paritate. În concluzie, cel puţin unul dintre numerele $a+b$, $b+c$, $c+a$ este număr par.

Problema 3: O echipă de fotbal este formată din 11 jucători şi 2 rezerve. Arătaţi că există cel puţin doi jucători născuţi în aceeaşi lună.

Soluţie: Un an are 12 luni. Acestea vor fi cutiile. Jucătorii, cu rezerve cu tot, reprezintă obiectele, iar numărul lor este 13. Conform principiului cutiei (avem mai multe obiecte decât cutii), într-o cutie vor fi cel puţin două obiecte. Aşadar, avem cel puţin doi jucători născuţi în aceeaşi lună.

Problema 4: Demonstraţi că dintre oricare 7 numere naturale există două a căror diferenţă se împarte exact la 6 (se divide cu 6).

Soluţie: Prin împărţirea unui număr natural la 6 putem obţine unul dintre resturile: 0, 1, 2, 3, 4 sau 5. Resturile vor reprezenta cutiile, iar cele 7 numere sunt obiectele. Aşadar, avem mai multe obiecte (7) decât cutii (6). Conform principiului cutiei, într-o cutie avem cel puţin două obiecte. Asta înseamnă că avem cel puţin două numere care să dea acelaşi rest la împărţirea la 6.

Dacă numerele sunt a şi b, $a > b$ avem

$$a = 6 \cdot n + r$$

şi

$$b = 6 \cdot p + r$$

Diferenţa acestor numere este

$$a - b = 6 \cdot n - 6 \cdot p = 6 \cdot (n - p)$$

care se împarte exact la 6.

Problema 5: La o lucrare de matematică, cei 25 de elevi ai unei clase au luat note de la 5 la 10, inclusiv. Arătaţi că există cel puţin 5 elevi care au luat aceeaşi notă.

Soluţie: Elevii puteau obţine notele: 5, 6, 7, 8, 9 sau 10. Acestea vor fi cutiile; în total 6 cutii. Obiectele sunt reprezentate de cei 25 de elevi. Dacă în fiecare cutie vom pune câte 4 obiecte înseamnă că am folosit

$$6 \times 4 = 24 \quad (obiecte)$$

Dar erau 25 de elevi (adică de obiecte), aşadar într-o cutie vor fi 5 obiecte (elevi). În concluzie, cel puţin 5 elevi au obţinut aceeaşi notă.

Problema 6: Într-o cameră sunt 30 de persoane. Arătaţi că există două persoane cu acelaşi număr de cunoştinţe în acea cameră.

Soluţie: O persoană poate avea 0, 1, 2, până la 29 de cunoştinţe. Acestea sunt cutiile şi sunt 30. Dar cutiile 0 şi 29 nu pot fi ocupate în acelaşi timp (Dacă o persoană nu are nicio cunoştiinţă, atunci nu putem avea o persoană cu 29 de cunoştinţe; dacă o peroană cunoaşte pe toată lumea nu putem avea o persoană care să spună că nu cunoaşte pe nimeni). Atunci rămân 29 de cutii şi 30 de persoane. Aşadar, într-o cutie sunt două persoane

Problema 7: Arătaţi că numărul 2011 are un multiplu de forma 1111...11.

Soluţie: Considerăm numerele 1, 11, 111, ..., $\underbrace{111...11}_{de\ 2012\ ori}$. Avem 2012 numere pe care, dacă le împărţim la 2011 obţinem 2011 resturi. Având în vedere problema 4 putem spune că există cel puţin două numere care dau acelaşi rest prin împărţire la 2011. Atunci diferenţa lor (vezi tot problema 4) se împarte exact la 2011 sau altfel spus, diferenţa lor este multiplu de 2011. Fie $\underbrace{111...11}_{n\ ori}$ şi $\underbrace{111...11}_{p\ ori}$ cu $n > p$ cele două numere care dau acelaşi rest la împărţirea la 2011. Diferenţa lor este

$$\underbrace{111...11}_{n\ ori} - \underbrace{111...11}_{p\ ori} = \underbrace{111..11}_{n-p\ ori}\underbrace{000...0}_{p\ ori}$$

Dar

$$\underbrace{111..11}_{n-p\ ori}\underbrace{000...0}_{p\ ori} = \underbrace{111..11}_{n-p\ ori} \cdot 1\underbrace{000...0}_{p\ ori}$$

Cum $1\underbrace{000...0}_{p\ ori}$ nu este multiplu al lui 2011 rezultă că $\underbrace{111..11}_{n-p\ ori}$ este multiplu al lui 2011.