Problema 3. O submulţime a mulţimii $\{1, 2, 3 \ldots, 50\}$ se numeşte *specială* dacă nu conţine nicio pereche de forma $\{x, 3x\}$. O submulţime specială se numeşte *superspecială* dacă ea are numărul maxim posibil de elemente. Câte elemente are o submulţime superspecială şi câte submulţimi superspeciale există?

Olimpiadă Finlanda, 2013

Soluţie:
Considerăm submulţimile: $A_1 = \{1, 3, 9, 27\}$, $A_2 = \{2, 6, 18\}$, $A_3 = \{4, 12, 36\}$, $A_4 = \{5, 15, 45\}$, $A_5 = \{7, 21\}$, $A_6 = \{8, 24\}$, $A_7 = \{10, 30\}$, $A_8 = \{11, 33\}$, $A_9 = \{13, 39\}$, $A_{10} = \{14, 42\}$ şi $A_{11} = \{16, 48\}$. Considerând elementele fiecăreia din aceste submulţimi ca fiind aranjate în ordine crescătoare, o submulţime specială nu poate conţine elemente consecutive ale niciuneia din mulţimi. Astfel, dintr-o submulţime specială pot face parte: cel mult două elemente (neconsecutive) din mulţimile A_1, A_2, A_3, A_4 (neconsecutive) şi cel mult un element din mulţimile $A_5, A_6, \ldots, A_{11}$. Pentru a obţine o submulţime superspecială, trebuie să scoatem din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 50\}$ două elemente din mulţimea A_1 şi câte unul din mulţimile $A_2, \ldots, A_{11}$, în total 12 elemente.
Reciproc, dacă scoatem două elemente din A_1 astfel încât numerele rămase să nu fie vecine (adică să scoate 1 şi 9, 3 şi 9 sau 3 şi 27), scoatem din mulţimile A_2, A_3, A_4 elementul mijlociu (6, 12 şi 15), iar din fiecare din mulţimile $A_5, A_6, \ldots, A_{11}$ câte un element, vom obţine o submulţime specială cu 38 de elemente. Aşadar o submulţime specială are cel mult 38 de elemente şi există submulţimi speciale cu 38 de elemente, prin urmare submulţimile superspeciale au 38 de elemente.
Ele se obţin eliminând din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 50\}$ următoarele elemente:
• din mulţimea A_1 trebuie să îi eliminăm fie pe 1 şi pe 9, fie pe 3 şi pe 9, fie pe 3 şi pe 27 (3 variante)
• din mulţimea A_2 trebuie să îl eliminăm pe 6 (o variantă)
• din mulţimea A_3 trebuie să îl eliminăm pe 12 (o variantă)
• din mulţimea A_4 trebuie să îl eliminăm pe 15 (o variantă)
• din mulţimea A_5 trebuie să îl eliminăm fie pe 7, fie pe 21 (2 variante)
• din mulţimea A_6 trebuie să îl eliminăm fie pe 8, fie pe 24 (2 variante)
• din mulţimea A_7 trebuie să îl eliminăm fie pe 10, fie pe 30 (2 variante)
• din mulţimea A_8 trebuie să îl eliminăm fie pe 11, fie pe 33 (2 variante)
• din mulţimea A_9 trebuie să îl eliminăm fie pe 13, fie pe 39 (2 variante)
• din mulţimea A_{10} trebuie să îl eliminăm fie pe 14, fie pe 42 (2 variante)
• din mulţimea A_{11} trebuie să îl eliminăm fie pe 16, fie pe 48 (2 variante)
Conform regulii produsului, putem face eliminările în $3 \cdot 2^7 = 384$ de moduri, deci sunt 384 de mulţimi superspeciale.