Clasa a X-a - Etapa 7 - Problema 2

Soluția problemei 2, Clasa a X-a
Etapa 7, Ediția a XI-a

Enunţ. *Fie triunghiul ABC. Notăm cu T punctul Torricelli-Fermat. Demonstraţi că*

$$AT \cdot BT + AT \cdot CT + BT \cdot CT + 3OT^2 \geq 3R^2, \tag{1}$$

unde O şi R reprezintă centrul şi reza cercului circumscris triunghiului ABC.

Soluţie. Pentru început, presupunem că unul dintre unghiuri are măsura mai mare sau egală cu $120°$, de exemplu unghiul A. În acest caz $T = A$. Atunci

$$AT \cdot BT + AT \cdot CT + BT \cdot CT + 3OT^2 = BA \cdot CA + 3R^2 \geq 3R^2.$$

În continuare, presupunem că toate unghiurile au măsura mai mică de $120°$. Atunci T este situat în interiorul triunghiului ABC şi $m(\measuredangle ATB) = m(\measuredangle BTC) = m(\measuredangle ATC) = 120°$. Notăm $AT = x$, $BT = y$ şi $CT = z$. Obţinem $S_{ATB} = \frac{xy\sqrt{3}}{4}$, $S_{ATC} = \frac{xz\sqrt{3}}{4}$ şi $S_{BTC} = \frac{yz\sqrt{3}}{4}$. Atunci T are coordonatele baricentrice $\left(\frac{xy\sqrt{3}}{4}, \frac{xz\sqrt{3}}{4}, \frac{yz\sqrt{3}}{4}\right)$. Din relaţia lui Lagrange, obţinem

$$\begin{aligned} OT^2 &= R^2 - \frac{3xyz}{16S_{ABC}^2}\left(xa^2 + yb^2 + zc^2\right) \\ &= R^2 - \frac{3xyz\left(xa^2 + yb^2 + zc^2\right)}{16\left(\frac{xy\sqrt{3}}{4} + \frac{xz\sqrt{3}}{4} + \frac{yz\sqrt{3}}{4}\right)^2} \\ &= R^2 - \frac{xyz\left(xa^2 + yb^2 + zc^2\right)}{(xy + xz + yz)^2}. \end{aligned}$$

Teorema cosinusului în triunghiul ATB ne conduce la $c^2 = x^2 + y^2 + xy$. Împreună cu relaţiile analoage, obţinem

$$\begin{aligned} xa^2 + yb^2 + zc^2 &= \sum xa^2 \\ &= \sum x\left(y^2 + z^2 + yz\right) \\ &= (x + y + z)(xy + xz + yz). \end{aligned}$$

Atunci (1) este echivalentă cu

$$xy + xz + yz \geq 3\left(R^2 - OT^2\right),$$

adică

$$\begin{aligned} & xy + xz + yz \geq \frac{3xyz\left(xa^2 + yb^2 + zc^2\right)}{(xy + xz + yz)^2} \\ \Leftrightarrow\ & xy + xz + yz \geq \frac{3xyz(x + y + z)}{(xy + xz + yz)} \\ \Leftrightarrow\ & (xy + xz + yz)^2 \geq 3xyz(x + y + z). \end{aligned}$$

Ultima relaţie este adevărată datorită inegalităţii clasice

$$(m + n + p)^2 \geq 3(mn + mp + np),$$

valabilă pentru orice numere reale m, n, p. ■