Problema 4. Fie hexagonul $ABCDEF$ şi punctele M, N, P, Q, R, S pe laturile AB, BC, CD, DE, EF, respectiv FA, astfel încât

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{PC}{PD} = \frac{QD}{QE} = \frac{RE}{RF} = \frac{SF}{SA} = k > 0.$$

Notăm cu G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 şi G_6 centrele de greutate distincte ale triunghiurilor ACD, BDE, CEF, DAF, EAB, respectiv FBC. Demonstraţi că segmentele (G_1G_2), (G_3G_4) şi (G_5G_6) sunt concurente, dacă triunghiurile MPQ, PRS şi RMN au acelaşi centru de greutate.

* * *

Soluţie. Fie L_1, L_2 şi L_3 centrele de greutate ale triunghiurilor MPQ, PRS, respectiv RMN.

$$\overrightarrow{r_{L_1}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_M} + \overrightarrow{r_P} + \overrightarrow{r_Q}\right) = \frac{1}{3(1+k)}\left(\overrightarrow{r_A} + k\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + k\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_D} + k\overrightarrow{r_E}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{r_{L_1}} = \frac{1}{1+k} \cdot \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D}\right) + \frac{k}{1+k} \cdot \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{r_{L_1}} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{r_{G_1}} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{r_{G_2}} \Leftrightarrow L_1 \in (G_1G_2)\,.$$

Analog rezultă că $L_2 \in (G_3G_4)$ şi $L_3 \in (G_5G_6)$, aşadar afirmaţia din enunţ este evidentă.