Problema 3. Fie şirul de fracţii:

$$\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{2}{2};\frac{2}{1};\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{3}{3};\frac{3}{2};\frac{3}{1};\ldots;\frac{1}{n};\frac{2}{n};\ldots;\frac{n}{n};\frac{n}{n-1};\frac{n}{n-2};\ldots;\frac{n}{1},\text{ unde } n\in\mathbb{N}^*.$$

a) Dacă $n = 2009$ aflaţi numărul fracţiilor din şir.

b) Arătaţi că pentru orice n număr natural nenul, numărul fracţiilor din şir este un pătrat perfect.

Radu Burz, Bistriţa

Soluţie. Şirul de fracţi poate fi scris astfel:

$$\begin{array}{c}
\frac{1}{1}\\
\frac{1}{2};\frac{2}{2};\frac{2}{1}\\
\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{3}{3};\frac{3}{2};\frac{3}{1}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{1}{n};\frac{2}{n};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\frac{n}{n};\frac{n}{n-1};\frac{n}{n-2};\ldots;\frac{n}{1}
\end{array}$$

Se observă că pe primul rând avem o fracţie $(2\cdot 1-1)$, pe rândul 2 sunt 3 fracţi $(2\cdot 2-1)$, pe rîndul 3 sunt 5 fracţii $(2\cdot 3-1)$. Deci pe rândul n vor fi $2n-1$ fracţii.

a) Dacă $n = 2009$ în şir vor fi $1+3+5+\ldots+(2\cdot 2009-1) = 2009^2$

b) Deoarece $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$ rezultă că pentru orice n număr natural nenul, numărul fracţiilor din şir este un pătrat perfect.