Etapa 5, Problema 2

Fie A o mulţime cu m elemente şi B o submulţime a sa având p elemente. Dacă $q \leq p \leq n \leq m$, determinaţi numărul de submulţimi ale lui A care conţin n elemente, q dintre acestea aparţinând lui B.

Deduceţi egalitatea

$$\sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} \binom{m-p}{n-q} = \binom{m}{n}.$$

***

Soluţie.

Fie X o submulţime a lui A ca în enunţul problemei. Cele q elemente din X care aparţin lui B se pot alege în $\binom{p}{q}$ moduri. Celelalte $n-q$ elemente ale lui X se pot alege în $\binom{m-p}{n-q}$ moduri. În concluzie, submulţimea X poate fi aleasă în $N(q) = \binom{p}{q}\binom{m-p}{n-q}$ moduri.

În total, mulţimea A are $\binom{m}{n}$ submulţimi cu m elemente. Dintre acestea, $N(0)$ nu conţin elemente din B, $N(1)$ conţin câte un singur element din B, $N(2)$ conţin câte două elemente din B, ..., $N(p)$ conţin toate elementele lui B. Rezultă că

$$\sum_{q=0}^{p} N(q) = \binom{m}{n}$$

şi, de aici, cerinţa problemei.