Problema 3. Determinați funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$xf(x+y)+yf(y-x)=f^2(x)+f^2(y),$$

pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.

***

Soluție.

Pentru $x=y=0$ obținem $0=2f^2(0)$, deci $f(0)=0$. Făcând doar $y=0$, obținem $xf(x)=f^2(x)$, de unde $f(x)(x-f(x))=0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Rezultă că

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in E\\ x, & x\in\mathbb{R}\setminus E\end{cases}.$$

Vom determina mulțimea E. Pentru $y=x$ avem $xf(2x)=2f^2(x),\ \ \forall x\in\mathbb{R}$, iar pentru $x=-y$ găsim $yf(2y)=f^2(-y)+f^2(y),\ \forall y\in\mathbb{R}$. Rezultă $f^2(-x)=f^2(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Înlocuind x cu $-x$, relația din enunț devine $-xf(y-x)+yf(y+x)=f^2(-x)+f^2(y)$, deci $-xf(y-x)+yf(y+x)=f^2(x)+f^2(y)$, care împreună cu relația din enunț conduce la

$$\left(x^2+y^2\right)\cdot f(x+y)=(x+y)\left(f^2(x)+f^2(y)\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

Cum $0\in E$, avem de tratat două cazuri: $E=\{0\}$ sau $E\setminus\{0\}\neq\varnothing$. Dacă $E=\{0\}$, obținem imediat $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Dacă $E\setminus\{0\}\neq\varnothing$, atunci există $a\neq 0$ așa încât $f(a)=0$. În relația (1) punem $y=a-x$ și obținem $a\left(f^2(x)+f^2(a-x)\right)=0$. Cum $a\neq 0$ rezultă că $f^2(x)+f^2(a-x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci $f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

În concluzie, funcțiile căutate sunt $f_1(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ și $f_1(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.