Clasa a X-a - Etapa I - Problema 4

Enunţ. Fie $a, b \in (1, \infty)$, $a < b$. Determinaţi toate soluţiile strict pozitive ale ecuaţiei

$$a^x + b^{\frac{1}{x}} = a^{\frac{1}{x}} + b^x.$$

Soluţie. Vom demonstra că $x = 1$ este unica soluţie.

Ecuaţia este echivalentă cu

$$b^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x}} = b^x - a^x.$$

Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = b^x - a^x$ este strict crescătoare deoarece

$$b^x - a^x = a^x \left(\left(\frac{b}{a} \right)^x - 1 \right),$$

iar funcţia $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = b^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x}}$ este strict descrescătoare deoarece $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Atunci, ecuaţia $f(x) = g(x)$ admite cel mult o soluţie strict pozitivă, ceea demonstrează afirmaţia iniţială. $\square$