Etapa 7, Problema 1

În triunghiul ABC, înălțimea AD (unde $D \in BC$) este egală cu latura BC. Notăm cu H ortocentrul triunghiului, cu M mijlocul lui BC și cu E mijlocul lui AD. Demonstrați că $HM = HE$.

D. Smeenk

Soluție.

Fie $BC = a > 0$. Raportăm planul la un reper cartezian cu originea în D, astfel încât $A(0,a)$, $B(b,0)$ și $C(b+a,0)$. Ecuația înălțimii BF este $y = \frac{a+b}{a}(x-b)$, iar cea a dreptei AD este $x = 0$. Deoarece $AD \cap BH = \{H\}$, obținem $H\left(0, -\frac{(a+b)b}{a}\right)$. Pe de altă parte, $E\left(0, \frac{a}{2}\right)$ și $M\left(\frac{a+2b}{2}, 0\right)$. Folosind formula care dă distanța dintre două puncte, obținem că

$$HE = \sqrt{\left(-\frac{(a+b)b}{a} - \frac{a}{2}\right)^2} = \frac{2b^2 + 2ab + a^2}{2a}, \text{ iar}$$

$$HM = \sqrt{\left(\frac{a+2b}{2}\right)^2 + \left(-\frac{(a+b)b}{a}\right)^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{a^4 + 4a^3b + 4a^2b^2 + 4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4}$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{\left(2b^2 + 2ab + a^2\right)^2} = \frac{2b^2 + 2ab + a^2}{2a}.$$

În concluzie, $HE = HM$.