COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2013 ETAPA NAŢIONALĂ, BRAŞOV

Abstract. Comments on some of the problems presented at the Final Round of the National Mathematics Olympiad 2013, Braşov.

Data: 15 aprilie 2013.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Aceste comentarii asupra Fazei Naţionale a Olimpiadei de Matematică, Braşov 2013, sunt, ca de obicei, opinia personală a autorului. Ele sunt adăugate la o prezentare selectată a probelor de concurs. [1]

Voi indica prin culoarea **roşie** eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea **albastră** pentru comentariile personale.

2. Clasa a VII-a

Subiectul (2). *Un **zar** este un cub de muchie* 1*, având înscrise pe feţe cifrele de la* 1 *la* 6*, astfel încât suma cifrelor de pe oricare două feţe opuse este* 7.

Folosind 27 *de zaruri, construim un cub cu muchia* 3.

Stabiliţi ce valori poate lua suma tuturor cifrelor de pe cele şase feţe ale cubului de muchie 3.

Soluţie. Există două posibilităţi de a construi un zar cubic; articolul din Wikipedia precizează

> Traditionally, opposite sides of a die add up to seven, implying that the 1, 2 and 3 faces share a vertex; these faces may be placed *clockwise* or *counterclockwise* about this vertex. If the 1, 2 and 3 faces run counterclockwise, the die is called *right-handed* and vice versa. Western dice are normally right-handed and Chinese dice are normally left-handed.

Din fericire, este irelevant pentru răspunsul la întrebare modul cum au fost construite zarurile.

Mulţumirile mele sincere celor cu care am dialogat cu privire la problemele propuse şi la efectele dorite, discuţii care au condus la materialul de faţă.

[1]Consultaţi subiectele în complet, soluţiile oficiale şi rezultatele la `http://ssmr.ro/onm2013` sau `http://www.onm.isjbrasov.ro/subiecte.html`.

Din fiecare dintre cele 8 zaruri de colţ se văd trei feţe adiacente; pentru fiecare, suma cifrelor vizibile poate fi $1+2+3=6$, $1+2+4=7$, $1+3+5=9$, $1+4+5=10$, sau complementele $6+2+3=11$, $6+2+4=12$, $6+3+5=14$, $6+4+5=15$. Din fiecare dintre cele 12 zaruri de la mijloacele muchiilor se văd două feţe adiacente; pentru fiecare, suma cifrelor vizibile poate fi $1+2=3$, $1+3=4$, $1+4=2+3=5$, $1+5=2+4=6$, $2+6=3+5=8$, $3+6=4+5=9$, $4+6=10$, $5+6=11$. Din fiecare dintre cele 6 zaruri din centrele feţelor se vede o faţă; pentru fiecare, suma cifrelor vizibile poate fi $1,2,3,4,5,6$. Zarul central, al 27-lea, este invizibil.

Prin urmare, sumele minimă şi maximă ale cifrelor de pe cele şase feţe ale cubului de muchie 3 sunt $m = 8\cdot 6 + 12\cdot 3 + 6\cdot 1 = 90$, respectiv $M = 8\cdot 15 + 12\cdot 11 + 6\cdot 6 = 288$. Dar din orice sumă s (mai puţin $s = 288$) putem obţine suma $s+1$; dacă un zar centru faţă arată o cifră $c \neq 6$, putem schimba cu $c+1$; altfel, dacă un zar mijloc muchie arată o cifră $c \neq 6, 11$, putem schimba cu $c+1$; altfel, dacă un zar colţ arată o cifră $c \neq 7, 12, 15$, putem schimba cu $c+1$.

Dar atunci, dacă un zar mijloc muchie arată o cifră $c = 6$, putem schimba cu $c+2 = 8$ şi în acelaşi timp schimba o cifră 6 a unui zar centru faţă cu 5; iar dacă un zar colţ arată o cifră $c = 7, 12$, putem schimba cu $c+2 = 9, 14$ şi în acelaşi timp schimba o cifră 6 a unui zar centru faţă cu 5.

Prin urmare, toate valorile între cele minimă $m = 90$ şi maximă $M = 288$, inclusiv, pot fi obţinute. □

Subiectul (3)**.** *Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $5AD < 2AB$. Pe latura AB se consideră punctele S şi T astfel încât $AS = ST = TB$. Notăm cu M, N şi P proiecţiile punctelor A, S respectiv T pe dreptele DS, DT respectiv DB. Arătaţi că punctele M, N şi P sunt coliniare dacă şi numai dacă $15AD^2 = 2AB^2$.*

Soluţie. Nici nu îndrăznesc să citesc soluţia oficială, complet metrică, şi peste 15 formule de tipul $\dfrac{a(12a^2+2b^2)}{6a^2-b^2}$, obţinute din Pitagora, Menelaus, teorema catetei şi altele. Aceasta fiind singura soluţie oferită, nu este de mirare că rezultatele sunt oribile – **un singur scor de** 7, şi o mână de alte scoruri mai mari decât 1. Problema aduce un deserviciu atât de mare spiritului matematic al olimpiadei, încât nu mă sfiesc să o numesc criminală. □

Subiectul (4)**.** *Fie n un număr natural nenul; considerăm mulţimea*

$$M = \{1, 2, \ldots, 2n+1\}.$$

Stabiliţi în câte moduri se poate partiţiona mulţimea M în trei submulţimi nevide A, B, C ($A\cup B\cup C = M$, $A\cap B = B\cap C = C\cap A = \emptyset$) astfel încât să fie satisfăcute simultan condiţiile

(i) pentru orice $a \in A$ şi orice $b \in B$, restul împărţirii lui a la b aparţine mulţimii C;

(ii) pentru orice $c \in C$ există $a \in A$ şi $b \in B$ astfel încât c este restul împărţirii lui a la b.

Soluţie. Pentru $a \in A$ şi $b \in B$ vom nota cu $c(a,b) = a - \lfloor a/b \rfloor b$, restul împărţirii lui a la b, trebuind să avem $c(a,b) \in C$, şi deci $0 < c(a,b) < b$. Trebuie atunci să avem $\alpha = \min A > \max B = \beta$, altfel $\alpha < \beta$ şi $c(\alpha,\beta) = \alpha$, absurd. Soluţia oficială continuă cu "Rezultă că mulţimea A este alcătuită din numere naturale consecutive şi $2n+1 \in A$", dar acest fapt necesită o clarificare, după cum urmează.

Fie $\gamma = \max C$; există atunci $a \in A$ şi $b \in B$ pentru care $\gamma = c(a,b)$, deci $2n+1 \geq a \geq \alpha > \beta \geq b > c(a,b) = \gamma$. De abia acum putem spune că avem $A = \{\alpha, \alpha+1, \ldots, 2n+1\}$. Următoarea continuare din soluţia oficială nu o înţeleg deloc "Fie b_1 cel mai mic element din mulţimea B. Deoarece $0 \notin C$, rezultă că $2b_1 > 2n+1$".

Continuarea mea este că trebuie acum să avem $\beta = \alpha - 1$ (din $\gamma < \beta$). Din relaţia obţinută mai sus $2n+1 \geq a = \lfloor a/b \rfloor b + \gamma \geq b + \gamma \geq 2\gamma + 1$ rezultă $\gamma \leq n$, şi deci $\gamma + 1 \in B$, cu $\gamma + 1 \leq n+1$. Dar dacă $n+1 \in A$, atunci A conţine cel puţin $(2n+1) - (n+1) + 1 = n+1$ numere naturale consecutive, şi atunci unul dintre ele se va divide cu $\gamma + 1$, ceea ce ar duce la un rest 0, absurd. Trebuie deci $n+1 \in B$, dar atunci $c(2n+1, n+1) = n \in C$, aşadar $\gamma = n$. Rezultă evident $\{n+1, n+2, \ldots, \alpha - 1\} \subseteq B$, pentru un $n+2 \leq \alpha \leq 2n+1$. Avem însă $c(a,b) = a - b$, pentru $\alpha \leq a \leq 2n+1$ şi $-\alpha + 1 \leq -b \leq -n-1$, căci atunci $1 = \lfloor \alpha/(\alpha-1) \rfloor \leq \lfloor a/b \rfloor \leq \lfloor (2n+1)/(n+1) \rfloor = 1$. Este uşor de văzut că aceste valori $a - b$ acoperă toată plaja de valori $1, 2, \ldots, n$, şi aceasta indiferent de valoarea lui $n+2 \leq \alpha \leq 2n+1$, ceea ce forţează $\{1, 2, \ldots, n\} \subseteq C$. Finalmente, aceasta înseamnă precis

$$A = \{\alpha, \alpha+1, \ldots, 2n+1\},\ B = \{n+1, n+2, \ldots, \alpha-1\},\ C = \{1, 2, \ldots, n\},$$

cu $(2n+1) - (n+2) + 1 = n$ valori pentru α, deci $\boxed{n \text{ soluţii}}$ cu totul.

O problemă extrem de dificilă, mai potrivită unui test de selecţie. Doar 5 scoruri de peste 4 puncte, şi mă întreb cum s-a făcut corectura, când soluţia oficială mi se pare incomprehensibilă. □

3. Clasa a VIII-a

Subiectul (2)**.** *Pe o tablă de şah de dimensiuni infinite se mută o tură, alternativ pe orizontală şi pe verticală. Tura se deplasează un pătrăţel la prima mutare, două pătrăţele la a doua mutare şi, în general, n pătrăţele la a n-a mutare, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Fie T mulţimea numerelor naturale n cu proprietatea că există un şir de n mutări după care tura revine la poziţia iniţială.*

a) Arătaţi că $2013 \notin T$;
b) Determinaţi numărul elementelor mulţimii $T \cap \{1, 2, \ldots, 2012\}$.

Soluţie. În româneşte, terminologia mai obişnuită pentru această piesă de şah este ***turn***, dar se pare că ***tură*** este cât de cât acceptat, aşa că treacă de la noi ...

Pentru acel caz când ultima mutare este ortogonală cu prima, parcursul descris a fost numit *golygon*, sau *izogon serial* de către Lee Sallows; există o literatură şi problemistică bogată legată de dezvoltări ale acestei noţiuni. Martin Gardner a găsit o colorare ingenioasă a tablei de şah, pentru a putea demonstra că trebuie $n \equiv 0, -1 \pmod 8$. Modele sunt uşor de găsit, bazate pe identitatea $m - (m+2) - (m+4) + (m+6) = 0$ pentru orice întreg $m \geq 0$, dar există şi altele decât cele construite astfel. Vă recomand să studiaţi materialul (în limba engleză) "Isogons-of-90-Degrees", disponibil pe site-ul nostru. Problema este, în zilele noastre, folclor ... $\square$

Subiectul (3)**.** *Determinaţi numărul real $x > 0$ şi numărul natural nenul n pentru care $\lfloor x \rfloor + \{1/x\} = 1.005 \cdot n$.*

Soluţie. Să rezolvăm, mai general, ecuaţia $\lfloor x \rfloor + \{1/x\} = k + \varepsilon$, pentru $x > 0$, $k \in \mathbb{N}$ şi $0 \leq \varepsilon < 1$ (adică $\lfloor x \rfloor = k$, $\{1/x\} = k + \varepsilon$).

• Dacă $\varepsilon = 0$, atunci $1/x = m \in \mathbb{N}^*$, deci $x = 1/m$. Acum, pentru $m = 1$ reiese $x = 1$, $k = 1$, adică soluţia $\boxed{(x, k, \varepsilon) = (1, 1, 0)}$; iar pentru $m > 1$ reiese $k = 0$, adică familia de soluţii $\boxed{(x, k, \varepsilon) = (1/m, 0, 0)}$, unde $m \geq 2$ întreg.

• Dacă $\varepsilon > 0$, atunci $1/x = m + \varepsilon$, cu $m \in \mathbb{N}$, deci $x = 1/(m + \varepsilon)$. Acum

  • dacă $m \geq 1$, atunci $1/(m + \varepsilon) < 1$, deci $k = \lfloor x \rfloor = 0$, adică familia de soluţii $\boxed{(x, k, \varepsilon) = (1/(m + \varepsilon), 0, \varepsilon)}$, unde $m \geq 1$ întreg şi $0 < \varepsilon < 1$.

  • dacă $m = 0$, atunci $x = 1/\varepsilon > 1$, deci $k = \lfloor x \rfloor \geq 1$, adică familia de soluţii $\boxed{(x, k, \varepsilon) = (1/\varepsilon, \lfloor 1/\varepsilon \rfloor, \varepsilon)}$, unde $0 < \varepsilon < 1$.

În cazul nostru, $k + \varepsilon = 1.005 \cdot n = \dfrac{201}{200} n > 1$, ceea ce elimină cazul $\varepsilon = 0$ şi primul subcaz de la $\varepsilon > 0$. Fie $n = 200q + r$, cu $q \in \mathbb{N}$ şi $0 \leq r < 200$, $r \in \mathbb{N}$. Atunci $k + \varepsilon = \dfrac{201}{200} n = (201q + r) + \dfrac{r}{200}$, de unde $r > 0$, căci $\varepsilon > 0$. Soluţia singurului subcaz rămas cere acum $201q + r = k = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor = \lfloor 200/r \rfloor$, de unde $q = 0$ şi deci $n = k = r = \lfloor 200/r \rfloor$, ceea ce conduce la $n^2 \leq 200 < n^2 + n$, cu singura posibilitate $n = 14$, de unde soluţia $\boxed{(x, n) = (100/7, 14)}$.

O problemă relativ sterilă, de manipulare a conceptelor de parte întreagă şi fracţionară într-o expresie din felul căreia se pot crea multe ... $\square$

Subiectul (4)**.** *Numim* ***specială*** *o mulţime M de numere reale având proprietăţile*

(i) pentru orice $x, y \in M$, $x \neq y$, numerele $x + y$ şi xy sunt nenule, exact unul dintre ele fiind raţional;
(ii) pentru orice $x \in M$, numărul x^2 este iraţional.

Aflaţi numărul maxim de elemente ale unei mulţimi speciale.

Soluţie. Evident, $0 \notin M$; pentru $|M| > 1$ avem $M \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, căci dacă $x \in M \cap \mathbb{Q}^*$ şi $y \in M \setminus \{x\}$, atunci $x + y$ şi xy sunt sau ambele raţionale, sau ambele iraţionale (un alt motiv este că din (ii) rezultă x iraţional).

Să notăm, pentru $x \in M$, cu $S_x = \{u \in M \setminus \{x\} \mid x + u \in \mathbb{Q}^*\}$ şi cu $P_x = \{v \in M \setminus \{x\} \mid xv \in \mathbb{Q}^*\}$; avem evident $M = \{x\} \cup S_x \cup P_x$ şi $S_x \cap P_x = \emptyset$.

Să presupunem că $v_1, v_2 \in P_x$ distincte; atunci $v_1 = \dfrac{r_1}{x}$ şi $v_2 = \dfrac{r_2}{x}$, cu $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}^*$, $|r_1| \neq |r_2|$. Dar atunci $v_1 + v_2 = \dfrac{r_1 + r_2}{x}$ şi $v_1 v_2 = \dfrac{r_1 r_2}{x^2}$ sunt ambele iraţionale (căci x^2 trebuie să fie iraţional), contradicţie. Prin urmare $|P_x| \leq 1$. Mai mult, pentru a avea $|P_x| = 1$ trebuie ca $P_x = \{y = \dfrac{r}{x}\}$, $r \in \mathbb{Q}^*$.

Să presupunem că $u_1, u_2, u_3 \in S_x$ distincte; atunci avem $u_1 = r_1 - x$, $u_2 = r_2 - x$ şi $u_3 = r_3 - x$, cu $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{Q}^*$ distincte. Dar atunci avem $u_1 + u_2 = (r_1 + r_2) - 2x \notin \mathbb{Q}$ şi deci trebuie $u_1 u_2 = (r_1 - x)(r_2 - x) \in \mathbb{Q}^*$. La fel, trebuie $u_1 u_3 = (r_1 - x)(r_3 - x) \in \mathbb{Q}^*$, dar atunci $\dfrac{r_2 - x}{r_3 - x} \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}$, dar aceasta duce la $x \in \mathbb{Q}$, contradicţie. Prin urmare $|S_x| \leq 2$. Mai mult, pentru a avea $|S_x| = 2$ trebuie deci $(r_1 - x)(r_2 - x) \in \mathbb{Q}^*$, aşadar x de forma $x = m \pm \sqrt{p}$, unde $m \in \mathbb{Q}^*$, iar $p \in \mathbb{Q}^*$ nu pătratul unui număr raţional. Avem acum aproape suficiente informaţii pentru a "ghici" un model maximal pentru o mulţime M specială cu 4 elemente, ca cea din soluţia oficială.

După chinuitoare calcule se poate efectiv găsi structura tuturor mulţimilor speciale M maximale, cu 4 elemente. Avem

$$M = \{x = m + \sqrt{p}, y = -m + \sqrt{p}, z = n - \sqrt{p}, t = -n - \sqrt{p}\},$$

unde $m, n \in \mathbb{Q}^*$, $|m| \neq |n|$ (din cauza cerinţelor $x + z$ şi $x + t$ nenule), iar $p \in \mathbb{Q}^*$ nu pătratul unui număr raţional. Modelul oferit "deus ex machina" din soluţia oficială se obţine pentru $m = -1$, $n = 2$, $p = 2$. Se verifică uşor că $xy, zt, x{+}z, x{+}t, y{+}z, y{+}t \in \mathbb{Q}^*$, la fel de uşor că $x{+}y, z{+}t, xz, xt, yz, yt \notin \mathbb{Q}$, şi în fine că $x^2, y^2, z^2, t^2 \notin \mathbb{Q}$.

O problemă extrem de dificilă. Doar un scor maxim de 7, şi foarte puţine alte scoruri de peste 2 puncte. □

4. Clasa a IX-a

Subiectul (1)**.** *Un şir de numere este numit* ***complet*** *dacă are termeni naturali nenuli şi orice număr natural nenul are cel puţin un multiplu printre termenii şirului.*
Arătaţi că o progresie aritmetică de numere naturale nenule este şir complet dacă şi numai dacă raţia sa divide primul termen.

Soluţie. O omisiune importantă; autorii au crezut că specificaţia conform căreia un şir complet este format din numere naturale nenule îi absolvă de nevoia de a impune aceeaşi condiţie progresiei aritmetice.

Fie progresia aritmetică de numere naturale nenule

$$a_0, a_1 = a_0 + r, \ldots, a_n = a_0 + nr, \ldots.$$

Evident cazul $r = 0$ este acoperit, căci atunci progresia nu este şir complet, dar nici raţia nu divide primul termen. Prin urmare considerăm $r > 0$. Dacă progresia este şir complet, atunci pentru $m = r$ există $n \geq 0$ astfel ca $m \mid a_n$, adică $r \mid a_0 + nr$, prin urmare $r \mid a_0$. Invers, dacă $r \mid a_0$, atunci pentru orice număr natural nenul m avem $m \mid a_n = a_0 + nr = r(a_0/r + n)$ luând $n = km - a_0/r$ pentru k suficient de mare. $\square$

Subiectul (2)**.** *Fie $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie arbitrară şi $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie de gradul al doilea, având proprietatea*

> *Pentru orice numere reale m şi n, ecuaţia $f(x) = mx + n$ are soluţii dacă şi numai dacă ecuaţia $g(x) = mx + n$ are soluţii.*

Arătaţi că funcţiile f şi g sunt egale.

Soluţie. Un raţionament grafic ne duce imediat la concluzie, **chiar pentru orice funcţie g strict convexă** (sau strict concavă, în care caz lucrăm cu $-g$ şi $-f$). Mulţimea D_g a punctelor aflate pe, sau deasupra graficului G_g al funcţiei g este deci strict convexă. Fie x_0 real; există atunci o dreaptă de suport ℓ_0 dată de $y = mx + n$ pentru D_g în punctul $(x_0, g(x_0))$. Dacă am avea $f(x_0) < g(x_0)$, atunci dreapta paralelă la ℓ_0 prin punctul $(x_0, f(x_0))$ nu intersectează G_g, dar intersectează graficul G_f al funcţiei f. Cum x_0 a fost luat arbitrar, rezultă că $f(x) \geq g(x)$ pentru orice x real, deci $G_f \subseteq D_g$. Dacă am avea acum $f(x_0) > g(x_0)$, atunci dreapta ℓ_0 nu intersectează G_f, dar intersectează G_g.

Un contraexemplu cu g convexă dar nu strict convexă este dat de $g(x) = 0$ pentru $|x| \leq 1$ şi $g(x) = x^2 - 1$ pentru $|x| \geq 1$, iar $f(x) = g(x)$ pentru $x \neq 0$ şi $f(0) = 1$. Un contraexemplu cu g neconvexă este dat de $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

O problemă care s-a dovedit extrem de dificilă, deşi ideea este simplă. Doar 4 scoruri de peste 3 puncte, şi foarte puţine alte scoruri diferite de 0. Un prim vinovat ar putea fi faptul că g funcţie de gradul doi este doar un caz particular, mascând fenomenul. Apoi, copiii noştri nu mai sunt obişnuiţi să facă raţionamente euristice, grafice, care să conducă la o soluţie formală, algebrizată. $\square$

Subiectul (4)**.** *Considerăm un număr natural nenul n şi funcţia*

$$f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{,dacă } x \text{ este par} \\[2mm] \dfrac{x-1}{2} + 2^{n-1} & \text{,dacă } x \text{ este impar} \end{cases}$$

Determinaţi mulţimea

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{de\ n\ ori\ f}(x) = x\}.$$

Soluţie. "Observăm că $f(x) < x$ pentru $x \geq 2^n$, deci $A \subseteq \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$" spune soluţia oficială, dar argumentul nu este suficient; nu rezultă atunci că $f(x) \geq 2^n$, deci şirul inegalităţilor se poate rupe. Mai trebuie adăugat că $f(x) < 2^n$ pentru $x < 2^n$, şi atunci dacă vreo iterată a lui f în $x \geq 2^n$ coboară sub 2^n vom avea $f^n(x) < 2^n \leq x$, iar dacă nu, inegalităţile se compun în a da tot $f^n(x) < x$.

Modul elegant este de a identifica un număr natural $0 \leq m \leq 2^n - 1$ cu cuvântul binar $w_m = (d_{n-1}, d_{n-2}, \ldots, d_1, d_0)$, unde $d_k \in \{0, 1\}$ pentru orice $0 \leq k \leq n-1$ şi $m = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^k$; atunci $f(w_m) = (d_0, d_{n-1}, \ldots, d_1) = \sigma(w_m)$, cu permutarea ciclică $\sigma = (n-1, \ldots, 1, 0)$. Astfel $f^n(w_m) = \sigma^n(w_m) = w_m$, şi atunci $A = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$. $\square$

5. Clasa a X-a

Subiectul (2)**.** *Se consideră numerele complexe distincte a, b, c, d. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente*

i) Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ are loc inegalitatea $|z-a|+|z-b| \geq |z-c|+|z-d|$;
ii) Există $t \in (0,1)$ astfel încât $c = ta + (1-t)b$ şi $d = (1-t)a + tb$.

Soluţie. Geometric, trebuie să arătăm că fiind date patru puncte distincte A, B, C, D în plan, avem $ZA + ZB \geq ZC + ZD$ pentru orice punct Z din plan dacă şi numai dacă C, D se află pe segmentul AB, egal distanţate de mijlocul său M (expresiile date sunt combinaţii convexe simetrice de a, b).

Dacă punctele C, D sunt astfel situate, luând Z' simetricul lui Z faţă de M, paralelogramul (eventual degenerat) $ZCZ'D$ este conţinut în paralelogramul (eventual degenerat) $ZAZ'B$, deci are semiperimetrul cel mult egal.

Invers, luând N mijlocul lui CD, avem $ZA + ZB \geq ZC + ZD \geq 2ZN$ pentru orice punct Z din plan. Atunci, pentru $Z \equiv A$ avem $AN \leq \frac{1}{2}AB$, iar pentru $Z \equiv B$ avem $BN \leq \frac{1}{2}AB$, deci trebuie $N \equiv M$. Prin urmare $AN = \frac{1}{2}AB = BN$. Aceasta implică $AC+AD = 2AN$ şi $BC+BD = 2BN$, deci A, C, D şi B, C, D sunt coliniare, cu C, D situate între A, B şi egal distanţate faţă de mijlocul lui AB.

Soluţia oficială este complet algebrică, şi din această cauză relativ netransparentă. Ca de obicei, viziunea geometrică este preferabilă, şi în plus mult mai elegantă. $\square$

Subiectul (3)**.** *Să se determine toate funcţiile injective $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care satisfac relaţia $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$.*

Soluţie. Avem $0 \neq |f(x+1) - f(x)| \leq 1$, deci "pasul" funcţiei f este ± 1 la fiecare moment. Dar injectivitatea lui f face ca pasul să nu poată fi schimbat, deci el este constant egal cu ± 1. Prin urmare $f(x) = x + f(0)$ sau $f(x) = -x + f(0)$.

O problemă din aceeaşi familie de idei a fost Subiectul 2 de la clasa a IX-a de anul trecut. Măcar era ceva mai dificilă, căci cea prezentă este copilăros de simplă, iar plasarea ei pe poziţia a 3-a o greşeală gravă de gust şi de estimare. Mai nimeni n-a ratat-o. $\square$

Subiectul (4).

a) Să se arate că

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^m}<m$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$.

b) Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *numerele prime mai mici decât* 2^{100}. *Să se arate că*

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\cdots+\frac{1}{p_n}<10.$$

Soluţie.

a) Arhicunoscut, prin simpla observaţie că

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}<\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}=1.$$

b) Fie $P=\{p_1,p_2,\ldots,p_n\}$. Numerele $xyzt$, cu $x\le y\le z\le t$ din P, sunt distincte, şi $1<xyzt<2^{400}$. Atunci

$$\left(\sum_{p\in P}\frac{1}{p}\right)^4 \le 4! \sum_{x\le y\le z\le t\in P}\frac{1}{xyzt}<24\sum_{q=2}^{2^{400}}\frac{1}{q}<24\cdot 400<10^4.$$

Exponentul 3 este prea mic pentru a furniza o margine bună. Pe de altă parte, să observăm că luând $P^*=\{1,p_1,p_2,\ldots,p_n\}$ obţinem

$$\left(1+\sum_{p\in P}\frac{1}{p}\right)^4 \le 4! \sum_{x\le y\le z\le t\in P^*}\frac{1}{xyzt}<24\sum_{q=1}^{2^{400}}\frac{1}{q}<24\cdot 401<10^4,$$

deci $\displaystyle\sum_{p\in P}\frac{1}{p}<9$. Mergând chiar mai departe, obţinem

$$\left(1+\sum_{p\in P}\frac{1}{p}\right)^6 \le 6! \sum_{x\le y\le z\le t\le u\le v\in P^*}\frac{1}{xyztuv}<720\sum_{q=1}^{2^{600}}\frac{1}{q}<720\cdot 601<9^6,$$

deci $\displaystyle\sum_{p\in P}\frac{1}{p}<8$. Nu are sens să mergem mai departe, căci 7 nu aduce o mare ameliorare, iar exponenţi mai mari decât 7 duc la valori mai proaste, căci $\sqrt[q]{q!(100q+1)}$ devine crescător pentru $q\ge 7$.

Problema, în forma ei finală, este împrumutată din lista suplimentară de probleme de schimb pentru concursul Master of Mathematics din martie 2013, şi aparţine lui Marius Cavachi (vezi comentariile mele pentru Testele de selecţie). Ideea a fost oarecum diluată, dintr-o dorinţă de a face întrebarea mai uşoară, cu toate că strică iremediabil problema, dar tot a rămas dincolo de posibilităţile concurenţilor, mai nimeni luând puncte pentru punctul b). Tipul de raţionament folosit îşi are obârşia la marele Euler. □

Consecinţa firească a alegerii problemelor clasei a X-a este că proba nu a fost deloc departajantă, locurile de la 3 la 21 fiind în plaja de scoruri $23-21$. Noroc cu Ştefan Spătaru, care i-a venit de hac problemei 4, altfel riscam să avem o grămadă de concurenţi cu acelaşi scor pe poziţia unu.

6. Clasa a XI-a

Subiectul (2)**.** *Fie m şi n numere naturale, $m, n \geq 2$. Considerăm matricele $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nu toate nilpotente. Demonstraţi că există un număr întreg $k > 0$ astfel încât $A_1^k + A_2^k + \cdots + A_m^k \neq 0_n$.*

Soluţie. Singura modalitate care pare aici disponibilă este calcularea *urmei* expresiilor date; din faptul că sume de puteri ale valorilor proprii ale matricelor sunt toate nule, formulele Newton conduc la concluzia că toate acele valori proprii vor fi nule, deci toate matricele nilpotente, absurd. Nu văd de ce matricele nu au fost date în $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu valori complexe, din moment ce faptul că sunt reale nu are nicio importanţă. Iar ideea nu este chiar la îndemână; noroc că astfel de metode s-au prezentat la pregătirile din afara clasei, la unele licee mai grijulii. □

Subiectul (4)**.**

a) Fie $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie derivabilă şi convexă. Arătaţi că dacă $f(x) \leq x$, oricare ar fi $x \geq 0$, atunci $f'(x) \leq 1$, oricare ar fi $x \geq 0$.

b) Determinaţi funcţiile $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ derivabile şi convexe care au proprietatea că $f(0) = 0$ şi $f'(x)f(f(x)) = x$, oricare ar fi $x \geq 0$.

Soluţie.

a) Este cunoscut faptul că derivata unei funcţii reale derivabilă şi convexă este funcţie crescătoare. Dacă ar exista $x_0 \geq 0$ cu $f'(x_0) > 1$, atunci pentru orice $x > x_0$ va exista (din teorema lui Lagrange) un $c_x \in (x_0, x)$ pentru care $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x) \geq f'(x_0) > 1$. Dar atunci

$$f(x) - x \geq (f'(x_0) - 1)x - (x_0 f'(x_0) - f(x_0)) > 0$$

pentru orice $x > x_0 + \dfrac{x_0 - f(x_0)}{f'(x_0) - 1}$, în contradicţie cu ipoteza.

Nu ştiu de ce soluţia oficială transferă teorema lui Lagrange în inegalităţi între pante de secante la graficul lui f, care rezultă din convexitatea lui f (invocate fără demonstraţie, la fel ca şi introducerea din demonstraţia mea). Cele două lucruri sunt evident echivalente, dat fiind că f este dată derivabilă.

b) Manipularea relaţiei date conduce infailibil la rezultatul $f(x) = x$ pentru orice $x \geq 0$. □

7. Clasa a XII-a

Subiectul (4)**.** *Fie $n \geq 2$ un număr natural, $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ cu proprietatea că $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{de\ m\ ori} \neq 0$ pentru orice $m = 2, \ldots, n$, $f \in K[X]$ un polinom de grad n şi $(G, +)$ un subgrup al grupului aditiv $(K+)$, $G \neq K$. Să se arate că există $a \in K$, astfel încât $f(a) \notin G$.*

Soluţie. Un rezultat într-adevăr simpatic, cu o soluţie care stă într-o singură idee – care dacă s-a pogorât asupra concurentului va duce imediat la soluţie, iar dacă nu, nu.

Ideea este de a considera operatorul de diferenţe finite $\Delta \colon K[X] \to K[X]$ dat prin $\Delta f(X) = f(X+1) - f(X)$ (provenienţa este de la marele Euler; o discuţie asupra proprietăţilor sale poate fi găsită în volumul **RMC 2006**). Vom avea $\deg \Delta f = \deg f - 1$ pentru caracteristica 0 sau mai mare decât $\deg f$, iar dacă $f(K) \subseteq G$, atunci şi $\Delta f(K) \subseteq G - G = G$ (G este grup). Prin iterare, rezultă $\Delta^{n-1} f(K) \subseteq G$, dar $\deg \Delta^{n-1} f = \deg f - (n-1) = 1$, aşadar o funcţie liniară, care este bijectivă, şi atunci $\Delta^{n-1} f(K) = K$, ceea ce conduce la $G = K$, contradicţie. □

8. Încheiere

După câte înţeleg eu, timpul închinat alcătuirii probelor de concurs de către Comisia Naţională se scurtează din ce în ce – în strictă conformitate cu Programul Oficial, comisia de elaborare a subiectelor nu ar fi avut timp să facă acest lucru decât în a doua jumătate a zilei de duminică şi prima jumătate a zilei de luni, încununată cu o şedinţă tehnică de 1/2 oră, luni seara. Mult prea expeditiv, superficial, şi pradă posibilităţilor (aş putea zice chiar certitudinilor) de eroare. Comisia Naţională devine în schimb din ce în ce mai obeză ca organism; mulţi veniţi, dar puţini "chemaţi".

Mai multă atenţie a fost acordată site-ului oficial, esenţial şi el – pentru comunicarea între lumea concursului şi cea "exterioară" – dar totuşi fiind secundar conţinutului matematic. De la distanţă judecând, gestionarea a fost în regulă, site-ul fiind încărcat cu probleme, soluţii şi rezultate, de îndată ce acestea deveneau disponibile.

Problemele au fost departe de a fi fost judicios alese; clasele a VII-a şi a X-a fiind cele mai deficitare din acest punct de vedere. De unde nu este, nici Domnul nu poate cere.

Unii dintre voi nici nu au participat; vă urez succes şi o calificare strălucită în anii care vor veni. Unii au avut un concurs de proastă calitate – nu vă descurajaţi! norocul se poate întoarce. Unii au obţinut rezultatele pentru care au muncit şi pe care le-au dorit – felicitările mele cele mai sincere!