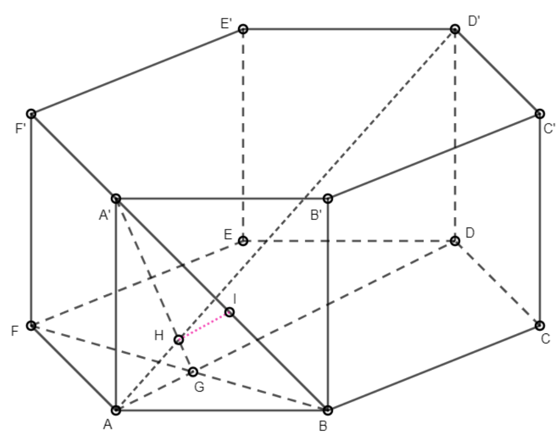
Problema 1

Prisma hexagonală ABCDEFA'B'C'D'E'F' are toate fețele laterale pătrate de latură ***a***, ***a*** număr real strict pozitiv. Demonstrați că AD' și A'B sunt perpendiculare și determinați distanța dintre aceste două drepte. Formulați și demonstrați o proprietate similară pentru prisme cu bazele având un număr par de laturi. *(Petru Braica)*



Soluție. Piramida triunghiulară de vârf A și bază A'BF este regulată deoarece are muchiile laterale egale cu a iar baza este un triunghi echilateral de latură $a\sqrt{2}$. De asemenea piamida triunghiulară de vârf D și bază triunghiul (A'BF) este de asemenea regulată întrucât muchiile laterale au lungimea de 2a iar baza este triunghi echilateral de latură $a\sqrt{2}$. Piciorul perpendicularei din vârful piramidei regulate pe planul bazei este centrul cercului circumscris acesteia, notat cu H. .Deci avem aceeași proiecție a vîrfurilor A și D' pe planul (A'BF). Din unicitatea perpendicularei într-un punct pe un plan deducem că A, H și D' sunt coliniare, deci AD' perpendiculară pe planul (A'BF) , plan ce include și diagonala A'B. Deci am demonstrat perpendicularitatea cerută.

Pentru calculul distanței vom formula generalizarea, vom calcula distanța pe caz general iar prin particularizare vom deduce distanța între cele două diagonale necoplanare.

În prisma dreaptă $A_1A_2\ldots A_{2n}B_1B_2\ldots B_{2n}$, regulată cu feţele laterale pătrate de latură a, diagonala $A_1B_{n+1}\perp A_2B_1$ iar distanţa dintre cele două drepte este dată de formula

$$d=a\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1-\sin^2\dfrac{2\pi}{2n}}{1+\sin^2\dfrac{\pi}{2n}}}.$$

Soluţie. Sunt cunoscute relaţiile:

$$R=\frac{a}{2\sin\dfrac{\pi}{2n}}\tag{1}$$

(raza cercului circumscris bazei) rezultată de exemplu aplicând T. cosinusului în $\triangle OA_1A_2$ şi $A_{n+1}A_2\perp A_1A_2$ (condiţii de simetrie). În aceste condiţii comparăm $\triangle B_{n+1}B_1A_1$ cu $\triangle B_{n+1}A_2A_1$ dreptunghice ($T3\perp$) cu $A_1B_1=A_1A_2=a$ iar (A_1B_{n+1}) ipotenuză comună. Din congruenţa lor pe modelul soluţiei 3 găsim acelaşi picior al înălţimii pe A_1B_{n+1} notat cu P şi imediat $PQ\perp A_2B_1$ va fi distanţa căutată.

$$A_2P=\frac{A_1A_2\cdot A_2B_{n+1}}{A_1B_{n+1}}=\frac{a\cdot\dfrac{a}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}}{\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{\sin^2\dfrac{\pi}{2n}}}}=\frac{a}{\sqrt{1+\sin^2\dfrac{\pi}{2n}}}$$

Acum lucrând în $\triangle PQA_2$ obţinem

$$PQ=\sqrt{\frac{a^2}{1+\sin^2\dfrac{\pi}{2n}}-\frac{2a^2}{4}}=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{2-2\sin^2\dfrac{\pi}{2n}}{1+\sin^2\dfrac{\pi}{2n}}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{1-\sin^2\dfrac{\pi}{2n}}{1+\sin^2\dfrac{\pi}{2n}}}$$

Dacă $n=3$ obţinem distanţa de la problema 1

$$PQ=\frac{a\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{\frac{1-\sin^2\dfrac{\pi}{6}}{1+\sin^2\dfrac{\pi}{6}}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{1-\dfrac{1}{4}}{1+\dfrac{1}{4}}}$$

$$=\frac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}=\frac{a\sqrt{30}}{2\cdot 5}=\frac{a\sqrt{30}}{10}$$