Problema 2. Determinaţii numerele naturale nenule a, b şi c care satisfac relaţia $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+c}=1$

Mihai Bunget, Tg. Jiu

Soluţie: Dacă $a \geq 0$ avem $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<1$. Rezultă că a poate fi 1,2 sau 3.

Pentru $a=1$ relaţia devine $\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+b+c}=0$, care este imposibilă.

Pentru $a=2$ relaţia devine $\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+b+c}=\frac{1}{2}$.

Dacă $b \geq 3$ avem $\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+b+c} \leq \frac{1}{5}+\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$. Rezultă că b este 1 sau 2.

Dacă $b=1$ avem $\frac{1}{3}+\frac{1}{3+c}=\frac{1}{2}$, de unde $c=3$.

Dacă $b=2$ avem $\frac{1}{4}+\frac{1}{4+c}=\frac{1}{2}$, de unde $c=0$, care nu convine.

Pentru $a=3$ relaţia dată devine $\frac{1}{3+b}+\frac{1}{3+b+c}=\frac{2}{3}$.

Dacă $b \geq 1$ avem $\frac{1}{3+b}+\frac{1}{3+b+c} \leq \frac{1}{4}+\frac{1}{4}<\frac{2}{3}$. Prin urmare, în acest caz, nu avem soluţii.