Etapa 2, Problema 2

Fie M o mulțime de numere complexe nenule cu proprietatea:

$$\forall x, y \in M \Rightarrow \frac{x}{y} \in M.$$

În cazul în care M are n elemente $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$, demonstrați că M este mulțimea rădăcinilor de ordin n ale unității.

Vasile Zidaru, Gazeta Matematică 12/1998

Soluție.

Pentru $x = y \in M$, obținem că $1 \in M$. Pentru $x = 1, y \in M$, obținem că $\frac{1}{y} \in M$. Considerând două elemente oarecare x, y ale lui M, pentru $x, y^{-1} \in M$, obținem că $xy \in M$.

Fie $M = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ și $a \in M$; atunci $ax_1, ax_2, ..., ax_n \in M$ și aceste n numere sunt distincte. Rezultă că

$$\{ax_1, ax_2, ..., ax_n\} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

Egalând produsele elementelor acestor două mulțimi, obținem că $a^n = 1$, prin urmare $a \in U_n$ și atunci $M \subset U_n$. Întrucât M și U_n au același cardinal, cele două mulțimi vor coincide.