Clasa a IX-a

Problema 2. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(0) = 0$ şi care verifică ecuaţia funcţională:

$$(x - y)(f(x) + f(y)) = f(x - f(y)) \cdot f(f(x) + y),\ \forall\ x, y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Vasile Pop

Soluţie.

Făcând $y = 0$ în relaţia (1) obţinem $xf(x) = f(x) \cdot f(f(x)),\ \forall x \in \mathbb{R}$, adică

$$f(x)(f(f(x)) - x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

iar de aici rezultă că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$f(x) = 0 \quad \text{sau} \quad f(f(x)) = x.$$

.... **1 punct**

Se observă că funcţia constantă $f_1(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ este soluţie....... **1 punct**

Dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(a) \neq 0$, atunci $a \neq 0$ şi $f(f(a)) = a$. Făcând $x = a$ şi $y = f(a)$ în relaţia (1) obţinem

$$(a - f(a))(f(a) + a) = f(a - a)f(f(a) + f(a)) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (f(a) - a)(f(a) + a) = 0,$$

deci $f(a) = a$ sau $f(a) = -a$.

Aşadar, dacă $f(a) \neq 0$ avem $f(a) \in \{a, -a\}$. (2)................. **1 punct**

Se verifică soluţiile $f_2(x) = x,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ şi $f_3(x) = -x,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$..... **1 punct**

Vom arăta că funcţiile f_1, f_2 şi f_3 sunt singurele soluţii.

Ştim deja că $f(0) = 0$ şi că pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$ avem $f(x) \in \{0, x, -x\}$.

Dacă, prin absurd, ar exista $x_0 \neq 0,\ y_0 \neq 0$ astfel încât $f(x_0) = x_0$ şi $f(y_0) = -y_0$, atunci $x_0 \neq y_0$, iar din relaţia (1) obţinem:

$$(x_0 - y_0)(x_0 - y_0) = f(x_0 + y_0) \cdot f(x_0 + y_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0+y_0)=\pm(x_0-y_0)\neq 0,$$

şi atunci din relaţia (2) obţinem:

$$f(x_0+y_0)=x_0+y_0 \text{ sau } f(x_0+y_0)=-(x_0+y_0)$$

adică

$$x_0+y_0=\pm(x_0-y_0) \text{ sau } -(x_0+y_0)=\pm(x_0-y_0)$$

ceea ce conduce la $x_0=0$ sau $y_0=0$, contradicţie.

Rămân de analizat cazurile:

A) $f(x)\in\{0,x\},\ \forall\, x\in\mathbb{R}^*$ şi

B) $f(x)\in\{0,-x\},\ \forall\, x\in\mathbb{R}^*$.

În cazul A), să presupunem prin absurd că există $y_0\neq 0$ astfel încât $f(y_0)=0$ şi există $x_0\neq 0$ astfel încât $f(x_0)=x_0$ (evident $x_0\neq y_0$).
Din relaţia (1) rezultă

$$(x_0-y_0)\cdot x_0=x_0\cdot f(x_0+y_0) \quad\Leftrightarrow\quad f(x_0+y_0)=x_0-y_0\neq 0$$

şi atunci avem $x_0+y_0=x_0-y_0\Rightarrow y_0=0$, contradicţie.

În cazul B), să presupunem prin absurd căt există $x_0\neq 0$ astfel încât $f(x_0)=0$ şi există $y_0\neq 0$ astfel încât $f(y_0)=-y_0$ (evident $y_0\neq x_0$).
Din relaţia (1) rezultă

$$(x_0-y_0)\cdot(-y_0)=f(x_0+y_0)\cdot(-y_0) \quad\Leftrightarrow\quad f(x_0+y_0)=x_0-y_0\neq 0,$$

şi atunci avem $-(x_0+y_0)=x_0-y_0\Rightarrow x_0=0$, contradicţie.

Astfel că rămân doar cele trei soluţii. . . . . **3 puncte**