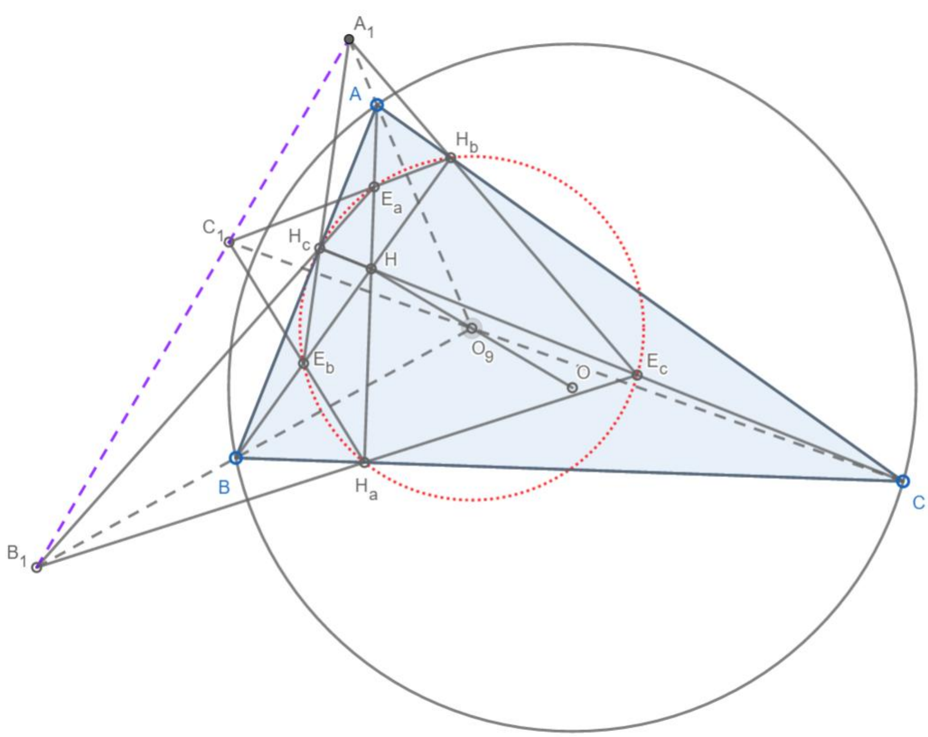
Problema 1. Fie ABC un triunghi oarecare și H ortocentrul său. Notăm cu E_a mijlocul segmentului (AH) și cu H_a proiecția punctului A pe latura BC; analog se introduc punctele E_b, mijlocul segmentului BH, H_b, proiecția lui B pe dreapta AC, E_c, mijlocul lui CH, iar H_c, proiecția punctului C pe dreapta AB. Mai notăm cu $\{ A_1 \} = E_bH_c \cap E_cH_b$, $\{ B_1 \} = E_cH_a \cap E_aH_c$, $\{ C_1 \} = E_aH_b \cap E_bH_a$.

Arătați că:

a) dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente în centrul cercului Euler al triunghiului ABC;

b) punctele A_1, B_1, C_1 sunt coliniare. (Petru Braica, SM)



Soluție. 1) Utilizăm coordonate baricentrice. Avem A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1).

Se știe că H(tgA, tgB, tgC) și O_9(a cos(B-C), bcos(C-A), ccos(A-B)).

Ca urmare H_a(0, tgB, tgC), H_b(tgA, 0, tgC), H_c(tgA, tgB, 0).

Pentru punctele euleriene E_a, E_b, E_c obținem: E_a(tgA(1+tgBtgC), tgB, tgC)) etc.

Ecuația dreptei H_bE_c este dată de :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ tgA & 0 & tg\,C \\ tg\,A & tgB & tgC(1+tgAtgB) \end{vmatrix} = 0,$$

Adică $tgC\,\alpha + tg^2A\,tgC\,\beta - tgA\,\gamma = 0$. (1)

La fel ecuația dreptei $H_c E_b$ este: $tgB\,\alpha - tgA\,\beta + tg^2A\,tgB\,\gamma = 0$. (2)

Rezolvând sistemul (1) + (2), obținem coordonatele baricentrice ale punctului A_1, anume

$$A_1(tgA(1-tgA(tgA+tgB+tgC), tgB(1+tgAtgC), tg(1+tgAtgB)).$$

Faptul că dreapta AA_1 trece prin O_9 revine la a verifica faptul că determinantul format de coordonatele acestor puncte este nul, ceea ce este ușor. Analog se arată că punctul O_9 aparține dreptelor BB_1, CC_1. Deci are loc concurența în centrul cercului celor 9 puncte asociat triunghiului ABC.

2) Este binecunoscut că hexagonul cu vârfurile în picioarele înălțimilor și mijloacele segmentelor determinate de vârfurile unui triunghi și ortocentru, numite și puncte euleriene, este unul inscriptibil. Punctele A_1, B_1, C_1 nu sunt altceva decât intersecțiile laturilor opuse ale acestui hexagon. Acum celebra teoremă a lui Pascal rezolvă coliniaritatea cerută. Alternativ la fel ca la punctul 1) determinantul format cu coordonatele baricentrice ale punctelor A_1, B_1, C_1 este nul, verificare imediată, așadar coliniaritatea se verifică.

Comentariu metodic. Folosind teorema lui Menelaus este posibilă o soluție sintetică. Totuși de data asta calculul analitic este mai la îndemână.