

Etapa 3, Problema 1

Pe un cerc de centru O se consideră punctele A_1, A_2, \dots, A_8 , în această ordine, astfel încât $\sphericalangle A_1OA_2 \equiv \sphericalangle A_3OA_4 \equiv \sphericalangle A_5OA_6 \equiv \sphericalangle A_7OA_8 = \frac{\pi}{4}$. Fie M, N, P, Q mijloacele segmentelor A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 respectiv A_7A_8 . Demonstrați că $MNPQ$ este pătrat dacă și numai dacă $A_1A_2\dots A_8$ este octogon regulat.

Nicolae Bourbăcuț

Soluție.

Fie $\alpha = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$. Considerând planul complex raportat la un reper cu originea în O , putem considera că afixele vârfurilor octogonului sunt $A_1(a), A_2(\alpha a), A_3(b), A_4(\alpha b), A_5(c), A_6(\alpha c), A_7(d)$ și $A_8(\alpha d)$. Punctele M, N, P, Q vor avea afixele $a \frac{1+\alpha}{2}, b \frac{1+\alpha}{2}, c \frac{1+\alpha}{2}$ respectiv $d \frac{1+\alpha}{2}$.

Din $MNPQ$ paralelogram obținem că $a+c=b+d$. Din $MP=NQ$ rezultă că $|a-c|=|b-d|$, iar din $MN=NP$ avem $|b-a|=|c-b|$. Toate acestea conduc la concluzia că $A_1A_3A_5A_7$ este pătrat și atunci $A_2A_4A_6A_8$ este tot pătrat, deoarece se obține din $A_1A_3A_5A_7$ printr-o rotație de centru O . Astfel, octogonul este regulat.

Implicația inversă este evidentă.