

Clasa a X-a - Etapa 5 - Problema 2

Fie $m, n, p, q, r \in \mathbb{N}$, $0 < m \leq n$ și $p + q + r = n$. Demonstrați relația $C_n^m = \sum_{x+y+z=m} C_p^x \cdot C_q^y \cdot C_r^z$.

Soluție: Folosim un model practic la care îi aplicăm numărarea dublă. De exemplu. Într-un oraș oarecare există un grup de n suporteri, p țin cu echipa P , q țin cu echipa Q și r țin cu echipa R . Se alege un număr de m suporteri care să reprezinte acest oraș la o adunare generală a suporterilor din țară. Care este numărul de posibilități de alegere a reprezentaților?

Cel mai simplu mod este să alegem m suporteri din totalul de n și ajungem la totalul C_n^m .

A doua variată de numărare este cea prin care alegem suporterii în funcție de echipa pe care o susțin. Din cei m aleși, avem x susținători ai echipei P , y susținători ai echipei Q și z susținători ai echipei R , adică $C_p^x \cdot C_q^y \cdot C_r^z$ moduri de alegere. însumând după condiția $x + y + z = m$ obținem

$$C_n^m = \sum_{x+y+z=m} C_p^x \cdot C_q^y \cdot C_r^z$$