Problema 3. Fie numărul $A = \overline{abcde}$. Determinaţi a, b, c, d, e pentru care suma cifrelor lui A este egală cu produsul cifrelor lui A.

Mihai Bunget, Tîrgu Jiu

Soluţie Trebuie să avem

$$a + b + c + d + e = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$$

şi cum adunarea şi înmulţirea sunt comutative putem presupune

$$a \leq b \leq c \leq d \leq e$$

Atunci $a+b+c+d+e \leq e+e+e+e+e$, adică $a+b+c+d+eleq5 \cdot e$, de unde $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \leq 5 \cdot e$ sau $a \cdot b \cdot c \cdot d \leq 5$.

Dacă $b \geq 2$, atunci $c \geq 2$ şi $d \geq 2$, de unde $a \cdot b \cdot c \cdot d \geq 8$. Prin urmare $b = 1$ şi cum $a \leq b$ avem şi $a = 1$.

Rămâne $c \cdot d \leq 5$. Dacă $c \geq 3$, atunci $d \geq 3$ şi $c \cdot d \geq 9$. Prin urmare $c = 1$ sau $c = 2$.

Pentru $c = 1$ obţinem $d \leq 5$, adică $d \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dar şi $3 + d + e = d \cdot e$ (*). Înlocuim pe d cu cele cinci valori şi avem
$d = 1 \Rightarrow 4 + e = e$ imposibil
$d = 2 \Rightarrow 5 + e = 2 \cdot e \Rightarrow e = 5$ $(1 + 1 + 1 + 2 + 5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5$
$d = 3 \Rightarrow 6 + e = 3 \cdot e \Rightarrow e = 3$ $(1 + 1 + 1 + 3 + 3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3$
$d = 4 \Rightarrow 7 + e = 4 \cdot e$ imposibil
$d = 5 \Rightarrow 8 + e = 5 \cdot e \Rightarrow e = 2$ imposibil $d \leq e$

Pentru $c = 2$ obţinem $2 \cdot d \leq 5$, adică $d \in \{1, 2\}$. Cum $c \leq d$ rămâne $d = 2$ şi din $6 + e = 4 \cdot e$ găsim $e = 2$.

În concluzie avem variantele

$$a = 1, \ b = 1, \ c = 1, \ d = 2, \ e = 5$$

$$a = 1, \ b = 1, \ c = 1, \ d = 3, \ e = 3$$

$$a = 1, \ b = 1, \ c = 2, \ d = 2, \ e = 2$$

de unde obţinem numerele 11125, 11152, 11215, 11512, 11251, 11521, 12115, 15112, 12511, 15211, 12151, 15121, 21115, 51112, 21151, 51121, 21511, 51211, 25111, 52111, 11133, 11313, 13113, 31113, 11331, 13311, 33111, 13131, 31131, 31311, 11222, 12122, 12212, 12221, 21122, 21212, 21221, 22112, 22121, 22211, în total 40 de numere.