Puncte limită ale unui şir de numere reale

Lect.dr. M.Chiş
Universitatea de Vest din Timişoara

Viitori Olimpici ediţia a 11-a, etapa a 2-a, clasa a XI-a

Definiţie 1. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale şi $l \in \overline{\mathbb{R}}$. l se numeşte punct limită al şirului (x_n) dacă există un subşir $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ al şirului (x_n) astfel încât $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l$.

Notaţie 2. Notăm cu $\mathcal{L}(x_n) = \{l \in \overline{\mathbb{R}} | \, l -$ punct limită al şirului $(x_n)\}$ mulţimea punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Observaţie 3. Pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, mulţimea $\mathcal{L}(x_n)$ este nevidă:
Dacă şirul este nemărginit, atunci $\mathcal{L}(x_n) \cap \{-\infty, \infty\} \neq \emptyset$, iar dacă şirul este mărginit, atunci conform lemei lui Cesaro, există un subşir al său care este convergent.

Observaţie 4. Condiţia necesară şi suficientă ca un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ să aibă limită este ca mulţimea punctelor sale limită să se reducă la un singur punct: $|\mathcal{L}(x_n)| = 1$.

În continuare vom da câteva caracterizări ale punctelor limită ale unui şir.

Propoziţie 5. $l \in \mathcal{L}(x_n) \iff (\forall) V \in \mathcal{V}(l) (\forall) m \in \mathbb{N} (\exists) n > m : \, x_n \in V$.

Demonstraţie. Pentru $l \in \mathcal{L}(x_n)$, fie $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ un subşir al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ având limita l. Atunci pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ există un rang $k_V \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_{n_k} \in V$ pentru orice $k \geq k_V$. Cum şirul $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este un strict crescător, există un termen al său n_{k_0} care este mai mare decât m. Pentru orice $k \geq max(k_0, k_V)$ au loc atunci relaţiile $x_{n_k} \in V$ şi $n_k > m$.
Reciproc, dacă $l \in \overline{\mathbb{R}}$ verifică condiţia $(\forall) V \in \mathcal{V}(l) (\forall) m \in \mathbb{N} (\exists) n > m : \, x_n \in V$, vom considera, şirurile de vecinătăţi $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ şi de numere $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ şi $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definite prin

$$V_k = \begin{cases} \left(l - \frac{1}{k+1}, l + \frac{1}{k+1}\right) & , \text{ pentru } l \in \mathbb{R}, \\ (k, \infty) & , \text{ pentru } l = \infty, \\ (-\infty, -k) & , \text{ pentru } l = -\infty, \end{cases}$$

$m_0 = 0$, $n_k = min\{n \in \mathbb{N} | n_k > m_k, x_{n_k} \in V_k\}$, $m_{k+1} = n_k$. Atunci $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ are limita l, astfel că $l \in \mathcal{L}(x_n)$. □

Corolar 6. $l \in \mathcal{L}(x_n) \iff [(\forall) V \in \mathcal{V}(l) \Longrightarrow |\{n \in \mathbb{N} | x_n \in V\}| = \infty]$.

Definiţie 7. O mulţime $A \subseteq \mathbb{R}$ se numeşte *închisă* dacă îşi conţine punctele de acumlare: $A' \subseteq A$.

Propoziţie 8. *Pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, mulţimea $\mathcal{L}(x_n)$ a punctelor sale limită este închisă.*

Demonstraţie. Fie $a \in \mathcal{L}(x_n)'$ un punct de acumulare oarecare al mulţimii $\mathcal{L}(x_n)$ a punctelor limită ale unui şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$. Pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ există $W \in \mathcal{V}(a)$ cu proprietatea că $W \subseteq V$ şi $W \in \mathcal{V}(y), (\forall) y \in W$. Cum $a \in \mathcal{L}(x_n)'$, există $l \in \mathcal{L}(x_n) \cap W \setminus \{a\}$. Cum $W \in \mathcal{V}(l)$, rezultă că $|\{n \in \mathbb{N} | x_n \in W\}| = \infty$. Dar atunci, deoarece $W \subseteq V$, avem şi că $|\{n \in \mathbb{N} | x_n \in V\}| = \infty$. Prin urmare, $a \in \mathcal{L}(x_n)$. Mulţimea $\mathcal{L}(x_n)$ este închisă. □

Definiţie 9. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ un şir de numere reale. Limita superioară a şirului (x_n) este

$$\limsup x_n \overset{not}{=} \overline{lim}\, x_n = sup(\mathcal{L}(x_n)),$$

iar limita inferioară a şirului (x_n) este

$$\liminf x_n \overset{not}{=} \underline{lim}\, x_n = inf(\mathcal{L}(x_n)).$$

Limitele superioară şi inferioară ale unui şir se mai numesc limitele extreme ale şirului.

Observaţie 10. Pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ are loc relaţia

$$\mathcal{L}(x_n) \subseteq \left[\underline{lim}\, x_n, \overline{lim}\, x_n\right].$$

Observaţie 11. Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ este un şir mărginit de numere reale, avem că $(\forall)\varepsilon > 0(\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N} : x_n \in \left(\underline{lim}\, x_n - \varepsilon, \overline{lim}\, x_n + \varepsilon\right)$, $(\forall)n \geq n_\varepsilon$.

Propoziţie 12. *Condiţia necesară şi suficientă ca un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ să aibă limită este $\underline{lim}\, x_n = \overline{lim}\, x_n$.*

Propoziţie 13. *Condiţia necesară şi suficientă ca un şir mărginit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ să fie convergent este ca $\overline{lim}\, x_n - \underline{lim}\, x_n < \varepsilon$, $(\forall)\varepsilon > 0$.*

Limitele extreme mai admit şi următoarele caracterizări:

Propoziţie 14. *$\overline{lim}\, x_n = inf_{n\in\mathbb{N}} sup\{x_k | k > n\}$, $\underline{lim}\, x_n = sup_{n\in\mathbb{N}} inf\{x_k | k > n\}$.*

În inegalităţi între şiruri se poate trece la limită inferioară, respectiv superioară.

Propoziţie 15. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ două şiruri cu proprietatea că $(\exists)n_0 \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n, (\forall)n \geq n_0$. Atunci $\underline{lim}\, x_n \leq \underline{lim}\, y_n$ şi $\overline{lim}\, x_n \leq \overline{lim}\, y_n$.*

Demonstraţie. Fie $\alpha < \underline{lim}\, x_n$ oarecare. Atunci există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > \alpha, (\forall)n \geq n_1$. Pentru $n \geq max(n_0, n_1)$ rezultă atunci că $y_n > \alpha$. Prin urmare, $\alpha \leq \underline{lim}\, y_n$. Rezultă că $\underline{lim}\, x_n \leq \underline{lim}\, y_n$. Analog se arată şi inegalitatea $\overline{lim}\, x_n \leq \overline{lim}\, y_n$. □

În legătură cu operaţii cu şiruri, mulţimile punctelor limită verifică următoarele proprietăţi:

Propoziţie 16. *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ două şiruri de numere reale. Atunci au loc relaţiile:*
a) $\mathcal{L}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{\mathcal{L}(x_n)}$;
b) $\mathcal{L}(x_n + y_n) \subseteq \mathcal{L}(x_n) + \mathcal{L}(y_n)$;
c) $\mathcal{L}(x_n \cdot y_n) \subseteq \mathcal{L}(x_n) \cdot \mathcal{L}(y_n)$.

Demonstraţie. a) Avem că $l \in \mathcal{L}(x_n) \iff (\exists)(n_k)_{k\in\mathbb{N}} : x_{n_k} \longrightarrow l \iff \frac{1}{x_{n_k}} \longrightarrow \frac{1}{l} \iff \frac{1}{l} \in \mathcal{L}\left(\frac{1}{x_n}\right)$. Rezultă că $\frac{1}{\mathcal{L}(x_n)} = \mathcal{L}\left(\frac{1}{x_n}\right)$.
b) Fie $l \in \mathcal{L}(x_n + y_n)$ oarecare. Înseamnă că există un şir strict crescător $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ astfel încât $x_{n_k} + y_{n_k} \longrightarrow l$. Fie $l_1 \in \mathcal{L}(x_{n_k})$. Atunci există un şir $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ cu $x_{n_{k_m}} \longrightarrow l_1$. Dacă $l_2 \in \mathcal{L}(y_{n_{k_m}})$, atunci $l_1 + l_2 = l$, şi rezultă că $l \in \mathcal{L}(x_n) + \mathcal{L}(y_n)$. Obţinem că $\mathcal{L}(x_n + y_n) \subseteq \mathcal{L}(x_n) + \mathcal{L}(y_n)$.
c) Se demonstrează analog cu b). □

Corolar 17. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ două şiruri de numere reale. Atunci:
a) $\underline{lim}\, x_n + \underline{lim}\, y_n \leq \underline{lim}\,(x_n + y_n) \leq \overline{lim}\,(x_n + y_n) \leq \overline{lim}\, x_n + \overline{lim}\, y_n$.
b) Dacă $x_n, y_n > 0, (\forall)n \in \mathbb{N}$, atunci $\underline{lim}\, x_n \cdot \underline{lim}\, y_n \leq \underline{lim}\,(x_n \cdot y_n) \leq \overline{lim}\,(x_n \cdot y_n) \leq \overline{lim}\, x_n \cdot \overline{lim}\, y_n$.
c) Dacă $x_n > 0, (\forall)n \in \mathbb{N}$, atunci $\underline{lim}\, \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\overline{lim}\, x_n}$ şi $\overline{lim}\, \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{lim}\, x_n}$.

Demonstraţie. Pentru orice mulţimi de numere reale $A, B \subseteq \mathbb{R}$ au loc proprietăţile:
$A \subseteq B \Longrightarrow inf(B) \leq inf(A), sup(A) \leq sup(B)$,
$inf(A + B) = inf(A) + inf(B)$, $sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$.
$A \subseteq (0, \infty) \Longrightarrow inf(A) = sup\frac{1}{A}$, $sup(A) = inf\frac{1}{A}$.
a) Rezultă că $\underline{lim}\, x_n + \underline{lim}\, y_n = inf\,(\mathcal{L}(x_n)) + inf\,(\mathcal{L}(y_n)) = inf\,(\mathcal{L}(x_n) + \mathcal{L}(y_n)) \leq inf\,(\mathcal{L}(x_n + y_n)) = \underline{lim}\,(x_n + y_n)$ şi $\overline{lim}\,(x_n + y_n) = sup\,(\mathcal{L}(x_n + y_n)) \leq sup\,(\mathcal{L}(x_n) + \mathcal{L}(y_n)) = sup\,(\mathcal{L}(x_n)) + sup\,(\mathcal{L}(y_n)) = \overline{lim}\, x_n + \overline{lim}\, y_n$.
Aanalog se arată şi b), respectiv c). □