PRINCIPIUL INCLUDERII ȘI EXCLUDERII

Rezumat. Articolul prezintă o modalitate de numărare folosind operațiile cu mulțimi și cardinalul unei mulțimi finite.

Lecția se adresează clasei a VI-a.

Autor: Ion Cicu, profesor, Școala Gimnazială nr. 96, București

În cele ce urmează, toate mulțimile cu care vom opera sunt mulțimi finite, altfel spus mulțimi cu un număr finit de elemente. În acest context, ne va interesa aflarea numărului de elemente al reuniunii a două sau trei mulțimi.

Definiție. Numim *cardinal al unei mulțimi* numărul de elemente al mulțimii. Cardinalul unei mulțimi A se notează $\operatorname{card} A$ sau $|A|$.

Exemplu. Fie $A = \{a, b, c, d, e\}$. Atunci $\operatorname{card} A = 5$, deoarece mulțimea A are 5 elemente.

Să remarcăm următorul fapt evident:

Observația 1. Dacă A și B sunt două mulțimi disjuncte ($A \cap B = \varnothing$), atunci

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B.$$

Ne interesează acum $\operatorname{card}(A \cup B)$ în cazul în care mulțimile nu sunt disjuncte ($A \cap B \neq \varnothing$). Pentru început, vom mai face câteva observații.

Observația 2. Pentru două mulțimi A și B sunt adevărate afirmațiile:

1. $A - B = A - (A \cap B)$;
2. $\operatorname{card}(A - B) = \operatorname{card} A - \operatorname{card}(A \cap B)$.

Faptul că afirmațiile de mai sus sunt adevărate rezultă imediat din Figura 1. Când scriem diferența dintre mulțimile A și B, din mulțimea B ne interesează numai elementele care se găsesc și în mulțimea A, adică elementele comune lui A și B.

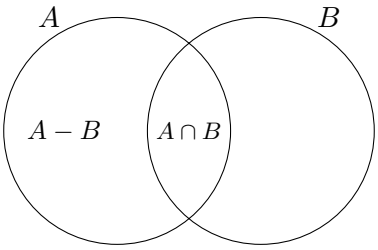
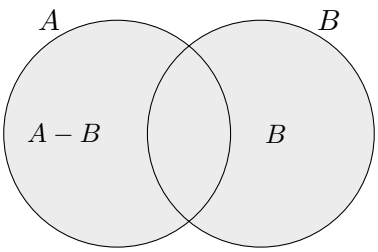


Figura 1



$A \cup B = (A - B) \cup B$

Figura 2

Figura 2 ne arată că reuniunea mulțimilor A și B o putem privi și ca reuniune a mulțimilor $A-B$ și B. Practic, aceasta înseamnă că, atunci când scriem reuniunea a două mulțimi, scriem mai întâi elementele uneia dintre mulțimi (în cazul nostru B), apoi elementele din cealaltă mulțime care nu se găsesc în mulțimea pe care am scris-o deja (în cazul nostru $A - B$). Acest lucru ne permite să formulăm:

Observația 3. Dacă A și B sunt două mulțimi, atunci

$$A \cup B = (A - B) \cup B.$$

Teorema 1 (principiul includerii și excluderii pentru două mulțimi). Dacă A și B sunt două mulțimi finite, atunci

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B).$$

Demonstrație. Afirmația din enunțul teoremei este evidentă dacă avem în vedere că a scrie reuniunea a două mulțimi înseamnă „a scrie împreună elementele celor două mulțimi, având grijă ca elementele comune să nu se repete”. Adunând cardinalele celor două mulțimi, elementele comune (cele din $A \cap B$) au fost numărate de două ori, deci trebuie să le scădem o dată.

Să încercăm acum o demonstrație mai riguroasă. Din Observația 3 putem scrie:

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}\big((A - B) \cup B\big). \tag{1}$$

Cum mulțimile $A - B$ și B sunt disjuncte, din Observația 1 avem:

$$\operatorname{card}\big((A - B) \cup B\big) = \operatorname{card}(A - B) + \operatorname{card} B. \tag{2}$$

Cu aceasta, relația (1) devine:

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A - B) + \operatorname{card} B. \tag{3}$$

Acum, datorită punctului 2 din Observația 2, relația (3) devine:

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A - \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card} B,$$

și teorema este demonstrată.

O teoremă asemănătoare se poate demonstra și pentru trei sau mai multe mulțimi finite. Ne vom limita la a demonstra teorema în cazul a trei mulțimi. Înainte de aceasta, să reținem:

Observația 4. Dacă A, B și C sunt trei mulțimi, atunci:

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
2. $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

Această observație poate fi ilustrată ușor pe o diagramă cu trei mulțimi.

Teorema 2 (principiul includerii și excluderii pentru trei mulțimi). Dacă A, B și C sunt trei mulțimi finite, atunci

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A \cup B \cup C) = {} & \operatorname{card} A + \operatorname{card} B + \operatorname{card} C \\ & - \operatorname{card}(A \cap B) - \operatorname{card}(A \cap C) - \operatorname{card}(B \cap C) + \operatorname{card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Demonstrație. Folosind Teorema 1 și Observația 4, avem succesiv:

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A\cup B\cup C) &= \operatorname{card}\big((A\cup B)\cup C\big) = \operatorname{card}(A\cup B)+\operatorname{card} C-\operatorname{card}\big((A\cup B)\cap C\big)\\ &= \operatorname{card} A+\operatorname{card} B-\operatorname{card}(A\cap B)+\operatorname{card} C-\operatorname{card}\big((A\cap C)\cup(B\cap C)\big)\\ &= \operatorname{card} A+\operatorname{card} B+\operatorname{card} C-\operatorname{card}(A\cap B)\\ &\quad-\big(\operatorname{card}(A\cap C)+\operatorname{card}(B\cap C)-\operatorname{card}(A\cap C\cap B\cap C)\big)\\ &= \operatorname{card} A+\operatorname{card} B+\operatorname{card} C-\operatorname{card}(A\cap B)-\operatorname{card}(A\cap C)\\ &\quad-\operatorname{card}(B\cap C)+\operatorname{card}(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

Așadar, teorema este demonstrată.

Acum să rezolvăm două probleme folosind principiul includerii și excluderii.

Problema 1. Într-o clasă, 18 elevi vorbesc limba germană, 15 elevi vorbesc limba franceză, iar 7 elevi vorbesc și limba germană, și limba franceză. Fiecare elev din clasă vorbește cel puțin una dintre aceste două limbi. Câți elevi sunt în clasă?

Soluție. Notăm cu A mulțimea elevilor care vorbesc limba germană și cu B mulțimea elevilor care vorbesc limba franceză. Atunci mulțimea elevilor care vorbesc ambele limbi este $A\cap B$, iar mulțimea elevilor din clasă este $A\cup B$ (pentru că fiecare elev vorbește cel puțin una dintre limbi). Cu aceste notații, numărul elevilor din clasă este $\operatorname{card}(A\cup B)$ și, având în vedere Teorema 1, scriem:

$$\operatorname{card}(A\cup B)=\operatorname{card} A+\operatorname{card} B-\operatorname{card}(A\cap B).$$

Dar $\operatorname{card} A=18$ (18 elevi vorbesc limba germană), $\operatorname{card} B=15$ (15 elevi vorbesc limba franceză) și $\operatorname{card}(A\cap B)=7$ (7 elevi vorbesc ambele limbi). Rezultă

$$\operatorname{card}(A\cup B)=18+15-7=26.$$

În concluzie, în clasă sunt 26 de elevi.

Problema 2. Într-o clasă cu 24 de elevi, fiecare elev practică cel puțin unul dintre sporturile fotbal, baschet și volei: 10 elevi joacă fotbal, 12 elevi joacă baschet, iar 8 elevi joacă volei. Se știe că 2 elevi joacă și fotbal, și baschet, 3 elevi joacă și baschet, și volei, iar 2 elevi joacă și fotbal, și volei. Arătați că există cel puțin un elev care joacă toate cele trei sporturi.

Soluție. Notăm cu A mulțimea elevilor care joacă fotbal, cu B mulțimea elevilor care joacă baschet și cu C mulțimea elevilor care joacă volei. Deoarece fiecare elev practică cel puțin un sport, mulțimea elevilor din clasă este $A\cup B\cup C$. Mulțimea elevilor care joacă și fotbal, și baschet este $A\cap B$, mulțimea celor care joacă și baschet, și volei este $B\cap C$, iar mulțimea celor care joacă și fotbal, și volei este $A\cap C$. În sfârșit, mulțimea elevilor care joacă toate cele trei sporturi este $A\cap B\cap C$.

Din Teorema 2 avem:

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A\cup B\cup C) &= \operatorname{card} A+\operatorname{card} B+\operatorname{card} C\\ &\quad-\operatorname{card}(A\cap B)-\operatorname{card}(A\cap C)-\operatorname{card}(B\cap C)+\operatorname{card}(A\cap B\cap C).\quad(*)\end{aligned}$$

Dar $\operatorname{card}(A\cup B\cup C)=24$, $\operatorname{card} A=10$, $\operatorname{card} B=12$, $\operatorname{card} C=8$, $\operatorname{card}(A\cap B)=2$, $\operatorname{card}(B\cap C)=3$ și $\operatorname{card}(A\cap C)=2$. Înlocuind în $(*)$, avem:

$$24=10+12+8-2-3-2+\operatorname{card}(A\cap B\cap C),$$

de unde rezultă

$$\operatorname{card}(A\cap B\cap C)=1,$$

ceea ce ne arată că există un elev care joacă toate cele trei sporturi.