Problema 3. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi triunghiul BCD situate în plane perpendiculare. Fie M mijlocul segmentului $[AD]$ şi G centrul de greutate al triunghiului ABC. Dacă $DG \perp (MBC)$, demonstraţi că triunghiul BCD este dreptunghic isoscel.

Mircea Fianu

Soluţie:
Fie N mijlocul segmentului $[BC]$. Punctele A, G şi N sunt coliniare, iar $AN \perp BC$ (1).
Din $DG \perp (MBC)$ şi $BC \subset (MBC)$ rezultă $BC \perp DG$ (2).
Din (1) şi (2) rezultă că $BC \perp (AND)$, deci, în triunghiul BCD, dreapta DN este mediatoarea segmentului $[BC]$, prin urmare triunghiul BCD este isoscel, cu $DB = DC$.
În triunghiul dreptunghic AND avem $NM = \dfrac{AD}{2}$ (3).
Dacă P este mijlocul segmentului $[AG]$ şi $\{R\} = DG \cap MN$, atunci $[PM]$ este linie mijlocie în triunghiul ADG, de unde deducem că $[GR]$ este linie mijlocie în triunghiul MNP, deci R este mijlocul segmentului $[MN]$. Cum $DR \perp MN$, rezultă că triunghiul DMN este isoscel, cu $DN = DM = \dfrac{AD}{2}$ (4).
Din (3) şi (4) rezultă că triunghiul DMN este echilateral.
În fine, să observăm că triunghiurile ANC şi AND sunt congruente (CU) (avem $[AN]$ latură comună şi $m(\sphericalangle ACN) = m(\sphericalangle ADN) = 60°$), deci $ND = NC = \dfrac{BC}{2}$, adică triunghiul BCD este dreptunghic în D.

Alte variante pentru demonstrarea afirmaţiei „DG trece prin mijlocul lui $[MN]$”:
1. Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul AMN tăiat de transversala $D - R - G$ rezultă direct că $MR = NR$.
2. Dacă D' este simetricul lui D faţă de N, atunci DG trece prin mijlocul lui $[AD']$ (G este centrul de greutate al triunghiului ADD'), iar $MN \parallel AD'$ (linie mijlocie), deci DG trece şi prin mijlocul lui $[MN]$.