Problema 4

Dacă m şi n sunt numere naturale nenule şi $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$, arătaţi că

$$\sqrt{2} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2\sqrt{2} \cdot n^2}.$$

***

Soluţie. Deoarece $m, n \in \mathbb{N}^*$ şi $n\sqrt{2} > m$, rezultă că $2n^2 - m^2$ este un număr întreg pozitiv, deci $2n^2 - m^2 \geqslant 1$. Atunci $(n\sqrt{2}+m)(n\sqrt{2}-m) \geqslant 1$, deci $n\sqrt{2} - m \geqslant \frac{1}{n\sqrt{2}+m}$.

Cum $m < n\sqrt{2}$, rezultă că $m + n\sqrt{2} < 2n\sqrt{2}$ şi atunci avem succesiv:

$$n\sqrt{2} - m \geqslant \frac{1}{n\sqrt{2}+m} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}.$$

Împărţind prin n, rezultă $\sqrt{2} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2\sqrt{2} \cdot n^2}$.