Arătaţi că dacă $x, y > 0$ cu $xy = 1$ atunci $\dfrac{x^2+2}{y+1} + \dfrac{y^2+2}{x+1} \geq 3$.

Andrei Eckstein, Revista RMCS, nr. 27 (2009)

Soluţie.
Punând $y = \dfrac{1}{x}$ şi eliminând numitorii, inegalitatea revine la $x^5 - x^3 - x^2 + 1 \geq 0$, adică la $(x^3-1)(x^2-1) \geq 0$, sau încă la $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1) \geq 0$ care este evidentă, ultimii doi factori fiind pozitivi. Egalitate avem pentru $x = y = 1$.

Observaţie. Inegalitatea rămâne adevărată şi dacă înlocuim condiţia $xy = 1$ cu $x + y \geq 2$ care este clar mai slabă. (Faptul că $xy = 1$ implică $x + y \geq 2$ se vede uşor din inegalitatea mediilor.)
Acest fapt se poate demonstra de exemplu folosind inegalitatea lui Bergström, o variantă a inegalităţii Cauchy-Buniakowsky-Schwarz care mai este cunoscută şi drept inegalitatea Titu Andreescu (Titu's Lemma):
Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ şi $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, atunci

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n},$$

cu egalitate dacă $\dfrac{a_1}{x_1} = \dfrac{a_2}{x_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{x_n}$.

În cazul nostru,

$$\frac{x^2+2}{y+1} + \frac{y^2+2}{x+1} = \frac{x^2}{y+1} + \frac{y^2}{x+1} + 2\left(\frac{1^2}{y+1} + \frac{1^2}{x+1}\right) \geq \frac{(x+y)^2}{x+y+2} + 2 \cdot \frac{(1+1)^2}{x+y+2}.$$

Notând $x + y = 2$, ar fi suficient să arătăm că $\dfrac{s^2+8}{s+2} \geq 3$, adică $s^2 - 3s + 2 \geq 0$, care se scrie $(s-1)(s-2) \geq 0$ şi este evident adevărată de îndată ce $x+y = s \geq 2$.

Observaţie. Valoarea minimă pentru x, $y > 0$ (fără alte condiţii) a membrului stâng este $4(\sqrt{3}-1)$ şi se atinge pentru $x = y = \sqrt{3}-1$.