Problema 3
Etapa 1
Clasa a X-a

Problema 3. Determinaţi toate tripletele (x, y, z) de numere naturale nenule pentru care $\sqrt{\frac{105}{x+y}}+\sqrt{\frac{105}{y+z}}+\sqrt{\frac{105}{z+x}}$ este număr întreg.

***

Soluţie. Vom demonstra mai întâi următorul rezultat teoretic:
Lemă. Dacă $a, b, c \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ şi $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c} \in \mathbb{Q}$.
Demonstraţia lemei. Fie $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = s \in \mathbb{Q}$. Atunci $\sqrt{a}+\sqrt{b} = s-\sqrt{c}$ şi prin ridicare la pătrat obţinem $a+b+2\sqrt{ab} = s^2+c-2s\sqrt{c}$. Dacă notăm $\frac{1}{2}(s^2+c-a-b) = u$, avem $u \in \mathbb{Q}, u > 0$ şi $\sqrt{ab} = u-s\sqrt{c}$. Ridicând din nou la pătrat, obţinem $ab = u^2+s^2c-2su\sqrt{c}$, de unde $\sqrt{c} = \frac{u^2+s^2c-ab}{2su}$. Rezultă $\sqrt{c} \in \mathbb{Q}$. Analog se arată că $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

Fie $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ trei numere cu proprietatea din ipoteză. Conform lemei, deducem că $\sqrt{\frac{105}{x+y}}$, $\sqrt{\frac{105}{y+z}}$ şi $\sqrt{\frac{105}{z+x}}$ sunt numere raţionale. Alegem $\sqrt{\frac{105}{x+y}} = \frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$ şi $(a, b) = 1$. Atunci $105b^2 = a^2(x+y)$, deci a^2 divide 105. Cum $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, deducem că $a = 1$. Rezultă $x+y = 105b^2$. Similar obţinem $y+z = 105c^2$ şi $z+x = 105d^2$, unde $c, d \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$\sqrt{\frac{105}{x+y}}+\sqrt{\frac{105}{y+z}}+\sqrt{\frac{105}{z+x}} = \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \in \mathbb{N}^*.$$

Cum $b, c, d \in \mathbb{N}^*$ rezultă $1 \leq \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \leq 3$, adică $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \in \{1, 2, 3\}$.

Dacă $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} = 3$, atunci $b = c = d = 1$, prin urmare $x+y = 105$, $y+z = 105$ şi $z+x = 105$. Adunând aceste trei egalităţi membru cu membru, obţinem $2(x+y+z) = 3 \cdot 105$, imposibil.

Dacă $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} = 2$, atunci unul dintre numerele b, c şi d este egal cu 1 şi celelalte două egale cu2. Nici în acest caz nu găsim soluţii.

Dacă $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} = 1$, să presupunem $b \geq c \geq d > 1$. Atunci $\frac{3}{d} \geq 1$, prin urmare $d = 2$ sau $d = 3$. Dacă $d = 3$ obţinem imediat $b = c = 3$, iar dacă $d = 2$, avem $\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{1}{2}$. Această ecuaţie are două soluţii: $b = 3, c = 6$ şi $b = c = 4$.

Analizând toate cazurile, deducem că avem soluţii $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ doar atunci când $d = 2$ şi $b = c = 4$. În acest caz, $y = 14 \cdot 105$ şi $x = z = 2 \cdot 105$.

În concluzie, soluţiile căutate sunt cele trei triplete (x, y, z) în care două numere sunt egale cu $2 \cdot 105$ şi unul cu $14 \cdot 105$.