Clasa a X-a

Problema 1. Demonstraţi că pentru orice numere $x, y, z \in [1, \infty)$ are loc inegalitatea

$$x \cdot \log_2(2^y + 2^z) + y \cdot \log_2(2^z + 2^x) + z \cdot \log_2(2^x + 2^y) \leq 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Cătălin Cristea, SGM 5/2021

Soluție și barem:

Pentru orice numere reale $a, b \in [2, \infty)$ are loc inegalitatea:

$ab = a + b + (a-1)(b-1) - 1 \geq a + b$ **2p**

Pentru orice $u, v \in [1, \infty)$ avem atunci

$\log_2(2^u + 2^v) \leq \log_2(2^u \cdot 2^v) = u + v$ **2p**

Atunci

$$\sum_{cyc} x \cdot \log_2(2^y + 2^z) \leq \sum_{cyc} x \cdot (y + z) = 2\left(xy + yz + zx\right) \leq 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

.... **3p**