

Clasa a IX-a - Etapa I - Problema 3 - Soluție

Enunț. Determinați $x \in \mathbb{Q}^*$ pentru care $1 + \frac{2}{[x]} + \frac{3}{\{x\}} = 4x \in \mathbb{Z}$.

Soluție. Considerând $4x = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{k}{4}$, așadar $\{x\} \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$. Deosebim cazurile:

(1) $\{x\} = \frac{1}{4}, [x] = p \in \mathbb{Z}$. Ecuația conduce la: $1 + \frac{2}{p} + 12 = 4(p + \frac{1}{4}) = 4p + 1 \Rightarrow 2p(p - 6) = 1$, absurd pentru $p \in \mathbb{Z}$.

(2) $\{x\} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + \frac{2}{p} + 6 = 4(p + \frac{1}{2}) = 4p + 2 \Rightarrow p(4p - 5) = 2$, absurd pentru $p \in \mathbb{Z}$.

(3) $\{x\} = \frac{3}{4} \Rightarrow 1 + \frac{2}{p} + 4 = 4(p + \frac{1}{2}) = 4p + 3 \Rightarrow 2p^2 - p - 1 = 0$; cum $p \in \mathbb{Z}$, se ajunge la $p = 1 \Rightarrow x = \frac{7}{4}$. □