Etapa 4, Problema 3

Determinaţi numerele raţionale x, y şi z pentru care

$$x^2 + y = y^2 + z = z^2 + x = 2.$$

Gh. Szöllösy, Gazeta Matematică 1/2005

Soluţie.
Prin substituţii succesive, obţinem că $y = 2 - x^2$, $z = 2 - y^2 = -2 + 4x^2 - x^4$ şi, cum $z^2 + x = 2$, deducem că

$$x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + x + 2 = 0. \qquad (*)$$

Numărul x fiind raţional, îl putem scrie sub forma $x = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Se arată că m este divizor al lui 2 şi că $n = 1$, prin urmare $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Înlocuind în $(*)$, se constată că doar valorile $x = -2$ şi $x = 1$ verifică acestă relaţie. Corespunzător, obţinem că soluţiile sistemului iniţial sunt

$$x = y = z = -2 \text{ şi } x = y = z = 1.$$