Etapa 1, Problema 1

Un joc matematic generează perechi de numere întregi pornind de la o pereche introdusă inițial. Jocul are trei opțiuni, după cum urmează:

- opțiunea A transformă perechea (a,b) în perechea (b,a);
- opțiunea B transformă perechea (a,b) în perechea $(a+3b,b)$;
- opțiunea C transformă perechea (a,b) în perechea $(a-2b,b)$.

Fiecare opțiune poate fi utilizată de oricâte ori. De exemplu, pornind de la perechea $(1,2)$ și aplicând succesiv șirul de opțiuni A, B, B, C, obținem perechea $(6,1)$.

a) Construiți un șir de aplicări ale celor trei opțiuni care să conducă de la perechea $(4,6)$ la perechea $(-2,-8)$.

b) Demonstrați că, dacă plecăm de la perechea $(2014,2015)$, nu putem ajunge la perechea $(20142014,20152015)$.

Soluție.

a) De exemplu, $(4,6)\xrightarrow{C}(-8,6)\xrightarrow{A}(6,-8)\xrightarrow{B}(-18,-8)\xrightarrow{C}(-2,-8)$.

b) Este evident că, dacă d este c.m.m.d.c al numerelor $a+3b$ și b, va fi și c.m.m.d.c al numerelor a și b. Analog pentru cazul $a-2b$ și b. Prin urmare, fiind dată o pereche oarecare (a,b), c.m.m.d.c.–ul componetelor perechilor care se obțin este invariant al acestor transformări. Cum numerele 2014 și 2015 sunt prime între ele iar numerele 20142014 și 20152015 au ca divizor comun pe 1001, obținem concluzia problemei.