Problema 2. Determinați valoarea maximă a produsului $\sin^4 x \cdot \cos^6 x$, unde $x \in \mathbb{R}$. Pentru câte numere $x \in (0, 2023)$ se atinge acest maxim?

Se consideră cunoscute primele cinci zecimale exacte ale numerelor π *și* $\sin 2023$*, adică* $\pi = 3{,}14159\ldots$ *și* $\sin 2023 = -0{,}18460\ldots$.

***

Soluție.

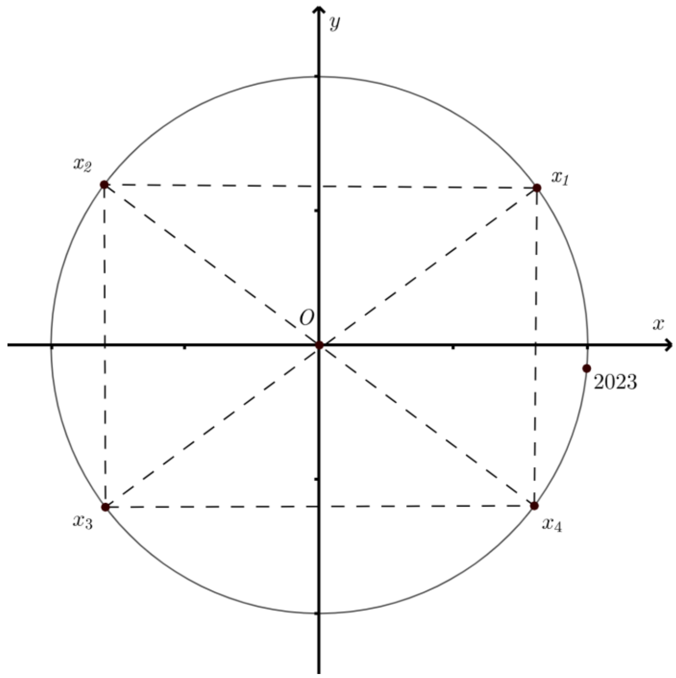
Vom folosi următorul rezultat binecunoscut, consecință a inegalității mediilor:

Lemă. Valoarea maximă a unui produs de n factori pozitivi ce au suma constantă s este $\left(\frac{s}{n}\right)^n$ și se atinge doar atunci când toți cei n factori sunt egali.

Demonstrația lemei: Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ astfel încât $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s$ și $P = x_1 x_2 \ldots x_n$. Conform inegalității mediilor avem $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, iar de aici obținem $P \leq \left(\frac{s}{n}\right)^n$. Cum în inegalitatea mediilor avem egalitate dacă și numai dacă toate numerele sunt egale, rezultă că valoarea maximă a lui P este $\left(\frac{s}{n}\right)^n$ și se atinge dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{s}{n}$.

Revenind la cerința problemei, notăm $Q = \sin^4 x \cdot \cos^6 x$ și avem $Q = \sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x = 2^2 \cdot 3^3 \cdot \frac{\sin^2 x}{2} \cdot \frac{\sin^2 x}{2} \cdot \frac{\cos^2 x}{3} \cdot \frac{\cos^2 x}{3} \cdot \frac{\cos^2 x}{3} = 108P$, unde P este un produs de cinci factori pozitivi, suma celor cinci factori fiind constantă pentru că $2 \cdot \frac{\sin^2 x}{2} + 3 \cdot \frac{\cos^2 x}{3} = 1$. Conform lemei rezultă că valoarea maximă a produsului Q este egală cu $108 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{108}{3125}$ și este atinsă numai atunci când $\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{\cos^2 x}{3}$.

Rezultă că valoarea maximă a lui Q este atinsă dacă și numai dacă $\sin^2 x = \frac{2}{5}$ și $\cos^2 x = \frac{3}{5}$, adică $\sin x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$ și $\cos x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$. În intervalul $[0, 2\pi]$ găsim patru astfel de numere: $x_1 = \arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}$, $x_2 = \pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}$, $x_3 = \pi + \arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}$ și $x_4 = 2\pi - \arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}$.



Trebuie să vedem de câte ori „intră” $[0, 2\pi]$ în $[0, 2023]$. Folosind aproximări obținem că $\left[\frac{2023}{2\pi}\right] = 321$ și $2023 = t + 321 \cdot 2\pi$, unde $t \in (x_4, 2\pi)$.

În concluzie, valoarea maximă a produsului $\sin^4 x \cdot \cos^6 x$ este atinsă pentru $4 \cdot 321 + 4 = 1288$ numere $x \in (0, 2023)$.