

## Descompunerea unei permutări în cicluri disjuncte

Lect.dr. M.Chis  
Universitatea de Vest din Timișoara

Viitori Olimpici ediția a 13-a, etapa I, clasa a XI-a

Vom considera pentru un  $n \in \mathbb{N}^*$  oarecare grupul simetric  $S_n$  al tuturor permutărilor mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}$ , numite și permutări de grad  $n$ , cu înmulțirea dată de compunerea permutărilor.

**Definiție 1.** O permutare  $\sigma \in S_n$  se numește *permutare ciclică* sau *ciclu* dacă există elemente  $i_1, i_2, \dots, i_l \in \{1, 2, \dots, n\}$  cu proprietatea că  $\sigma(i_k) = i_{k+1}$ ,  $(\forall) k = \overline{1, l}$ , unde  $i_{l+1} = i_1$ , iar  $\sigma(j) = j$ ,  $(\forall) j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$ . Vom nota cu  $(i_1, i_2, \dots, i_l)$  această permutare ciclică, iar numărul  $l$  se va numi *lungimea ciclului*.

**Observație 2.** Evident, dacă  $l = 1$ , atunci  $(i_1) = id$ , permutarea identică. Scrierea unui ciclu de lungime  $l \geq 2$  nu este unică, deoarece  $(i_1, i_2, \dots, i_l) = (i_j, i_{j+1}, \dots, i_l, i_1, \dots, i_{j-1})$ ,  $(\forall) j \in \overline{2, l}$ . Abstracție făcând însă de alegerea primului element, ordinea succesivă a elementelor determină ciclul în mod unic.

**Definiție 3.** *Ordinul unei permutări*  $\sigma \in S_n$ , pe care îl vom nota  $ord(\sigma)$ , este cel mai mic număr  $m \in \mathbb{N}^*$ , cu proprietatea că  $\sigma^m = id$ .

**Observație 4.** Are loc următoarea caracterizare a ordinului unei permutări:

$$ord(\sigma) = m \iff [\sigma^t = id \iff m|t].$$

**Propoziție 5.** Dacă  $ord(\sigma) = m$ , atunci  $ord(\sigma^k) = \frac{m}{(m,k)}$ ,  $(\forall) k \in \mathbb{Z}$ .

**Demonstrație.** Avem echivalențele  $(\sigma^k)^t = id \iff m|kt \iff \frac{m}{(m,k)} | \frac{k}{(m,k)} t \iff \frac{m}{(m,k)} | t$ . De aici rezultă afirmația din enunț.  $\square$

**Observație 6.** Dacă  $c = (i_1, i_2, \dots, i_l)$  este un ciclu de lungime  $l$ , atunci  $c^k(i_j) = i_{j+k}$ ,  $(\forall) j = \overline{1, l}$  (indicii fiind calculați modulo  $l$ ). Obținem că  $c^l = id$ , iar  $c^k \neq id$ ,  $(\forall) 1 \leq k < l$ . Astfel,  $ord(c) = l$ .

**Notație 7.** Pentru o permutare  $\sigma \in S_n$  vom nota cu  $F(\sigma) = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} | \sigma(i) = i\}$  mulțimea punctelor fixe ale lui  $\sigma$ , respectiv cu  $M(\sigma) = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} | \sigma(i) \neq i\}$  mulțimea punctelor "mișcate" de permutarea  $\sigma$ .

**Observație 8.** Pentru orice permutări  $\alpha, \beta \in S_n$  avem că  $F(\alpha) \cap F(\beta) \subseteq F(\alpha\beta)$ .

**Definiție 9.** Două permutări  $\alpha, \beta \in S_n$  se numesc *disjuncte* dacă  $M(\alpha) \cap M(\beta) = \emptyset$ .

**Observație 10.** Condiția ca două permutări  $\alpha, \beta \in S_n$  să fie disjuncte se poate exprima echivalent și prin  $M(\alpha) \subseteq F(\beta)$  (sau, prin simetrie,  $M(\beta) \subseteq F(\alpha)$ ).

**Propoziție 11.** Oricare două permutări disjuncte  $\alpha, \beta \in S_n$  comută, i.e. verifică egalitatea  $\alpha\beta = \beta\alpha$ .

**Demonstrație.** Dacă  $\alpha, \beta \in S_n$  sunt disjuncte, atunci pentru orice  $i \in M(\beta)$  rezultă că  $\beta(i) \in M(\beta) \subseteq F(\alpha)$  și obținem că

$$\alpha\beta(i) = \begin{cases} i & , \text{dacă } i \in F(\alpha) \cap F(\beta) \\ \beta(i) & , \text{dacă } i \in M(\beta) \\ \alpha(i) & , \text{dacă } i \in M(\alpha) \end{cases} = \beta\alpha(i), \quad (\forall) i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

$\square$

**Corolar 12.** Dacă permutările  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in S_n$  sunt disjuncte două câte două, produsul lor nu depinde de ordinea factorilor.

**Propoziție 13.** Orice permutare se poate scrie în mod unic ca produs de cicluri disjuncte.

**Demonstrație.** Fie  $\sigma \in S_n$  o permutare oarecare. Pentru orice  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  există un cel mai mic  $l_i \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $\sigma^{l_i}(i) = i$ . Pentru orice  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  ciclurile (unic determinate)  $(i, \sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^{l_i-1}(i))$  și  $(j, \sigma(j), \sigma^2(j), \dots, \sigma^{l_j-1}(j))$  sunt atunci fie egale, fie disjuncte. Produsul tuturor acestor cicluri, considerat fiecare o singură dată, este atunci exact permutarea  $\sigma$ .  $\square$

**Propoziție 14.** Dacă  $\sigma = c_1 c_2 \dots c_k$  este descompunerea unei permutări  $\sigma \in S_n$  în cicluri disjuncte, ordinul său este dat de  $\text{ord}(\sigma) = [l(c_1), l(c_2), \dots, l(c_k)]$ .

**Demonstrație.** Deoarece ciclurile disjuncte comută, avem că  $\sigma^m = c_1^m c_2^m \dots c_k^m$  și obținem că  $\sigma^t = id \iff c_j^t = id, (\forall) j = \overline{1, k} \iff l(c_j) | t, (\forall) j = \overline{1, k} \iff [l(c_1), l(c_2), \dots, l(c_k)] | t$ . Echivalența arată că  $\text{ord}(\sigma) = [l(c_1), l(c_2), \dots, l(c_k)]$ .  $\square$

**Propoziție 15.** Dacă  $c$  este un ciclu de lungime  $l$ , iar  $k \in \mathbb{Z}$  este prim cu  $l$ , atunci  $c^k$  este de asemenea un ciclu de lungime  $l$ .

**Demonstrație.** Fie  $c = (i_1, i_2, \dots, i_l)$ . Cum  $(k, l) = 1$ , pentru orice  $1 \leq j < l$  există  $u \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $ku \equiv j \pmod{l}$ . Rezultă că  $(c^k)^u(i_t) = i_{t+j}, (\forall) t = \overline{1, l}$ , astfel că elementele  $i_1, i_2, \dots, i_l$  fac parte dintr-un același ciclu al permutării  $c^k$ . Cum  $F(c) \subseteq F(c^k)$ , rezultă afirmația din enunț.  $\square$

**Propoziție 16.** Dacă  $c$  este un ciclu de lungime  $l$ , iar  $d \in \mathbb{N}$  este un divizor al lui  $l$ , atunci  $c^d$  se descompune într-un produs de  $d$  cicluri disjuncte de lungime  $\frac{l}{d}$ .

**Demonstrație.** Dacă  $c = (i_1, i_2, \dots, i_l)$ , pentru orice  $j = \overline{1, l}$  și orice  $1 \leq k \leq \frac{l}{d}$  avem că  $(c^d)^k(i_j) = i_{j+kd}$ . Rezultă că

$$c^d = \prod_{j=1}^d (i_j, i_{j+d}, i_{j+2d}, \dots, i_{j+l-d}).$$

$\square$

**Propoziție 17.** Dacă  $c$  este un ciclu de lungime  $l$ , iar  $k \in \mathbb{Z}$  are proprietatea că  $(l, k) = d$ , atunci  $c^k$  se descompune în  $d$  cicluri de lungime  $\frac{l}{d}$ .

**Demonstrație.** Fie  $l_1 \in \mathbb{N}$  și  $k_1 \in \mathbb{Z}$ , astfel încât  $l = d \cdot l_1$  și  $k = d \cdot k_1$ . Avem atunci că  $(l_1, k_1) = 1$ ,  $c^d$  este un produs de  $d$  cicluri disjuncte de lungime  $l_1$  și rezultă că  $c^k = (c^d)^{k_1}$  este un produs de  $d$  cicluri de lungime  $l_1$ .  $\square$

**Propoziție 18.** Dacă  $c = (i_1, i_2, \dots, i_l)$  și  $\alpha$  sunt două permutări de grad  $n$ , atunci

$$\alpha \cdot c \cdot \alpha^{-1} = (\alpha(i_1), \alpha(i_2), \dots, \alpha(i_l)).$$

**Demonstrație.** Pentru orice  $k = \overline{1, l}$  avem că  $(\alpha \cdot c \cdot \alpha^{-1})(\alpha(i_k)) = \alpha(c(i_k)) = \alpha(i_{k+1})$ . De asemenea, pentru orice  $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$  avem  $(\alpha \cdot c \cdot \alpha^{-1})(\alpha(j)) = \alpha(c(j)) = \alpha(j)$ . Deducem astfel egalitatea din enunțul propoziției.  $\square$

**Observație 19.** Dacă  $\sigma, \alpha \in S_n$  sunt permutări de grad  $n$ , iar  $\sigma$  se descompune în produs de cicluri disjuncte sub forma  $\sigma = c_1 c_2 \dots c_k$ , rezultă că  $\alpha \sigma \alpha^{-1} = \alpha c_1 \alpha^{-1} \cdot \alpha c_2 \alpha^{-1} \cdot \dots \cdot \alpha c_k \alpha^{-1}$ . Astfel, formula din propoziția de mai sus permite calculul conjugatei unei permutări  $\sigma$  printr-o permutare  $\alpha$  (i.e., al produsului  $\alpha \sigma \alpha^{-1}$ ).

**Propoziție 20.** Un ciclu  $c = (i_1, i_2, \dots, i_l)$  se poate descompune în produs de transpoziții (=cicluri de lungime 2) sub forma  $c = (i_1, i_l)(i_1, i_{l-1}) \dots (i_1, i_3)(i_1, i_2)$ .

**Demonstrație.** Notând  $t_k = (i_1, i_k)$  pentru  $k = \overline{2, l}$ , avem că

$$t_l t_{l-1} \dots t_3 t_2(i_1) = t_l t_{l-1} \dots t_3(i_2) = i_2,$$

$$t_l t_{l-1} \dots t_3 t_2(i_k) = t_l t_{l-1} \dots t_{k+1} t_k(i_k) = t_l t_{l-1} \dots t_{k+1}(i_1) t_l t_{l-1} \dots t_{k+2}(i_{k+1}) = i_{k+1}, \quad (\forall) k = \overline{2, l}, \text{ respectiv}$$

$$t_l t_{l-1} \dots t_3 t_2(j) = j, \quad (\forall) j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_l\}.$$

Rezultă că  $t_l t_{l-1} \dots t_3 t_2 = (i_1, i_2, \dots, i_l) = c$ .  $\square$

**Corolar 21.** Orice permutare se descompune în produs de transpoziții.

**Observație 22.** Au loc identitățile:

$$\begin{aligned} (a, i_2, \dots, i_k)(b, j_1, \dots, j_l)(a, b) &= (a, j_1, \dots, j_l, b, i_1, \dots, i_k) \\ (a, j_1, \dots, j_l, b, i_1, \dots, i_k)(a, b) &= (a, i_2, \dots, i_k)(b, j_1, \dots, j_l), \end{aligned}$$

astfel că înmulțind o permutare  $\sigma$  cu o transpoziție  $\tau$ , numărul ciclurilor disjuncte ale lui  $\sigma\tau$  diferă de cel al lui  $\sigma$  cu exact unul.

**Corolar 23.** Dacă  $\sigma \in S_n$  se descompune în exact  $k$  cicluri disjuncte, atunci numărul minim de transpoziții în care se descompune  $\sigma$  este  $n - k$ .

**Definiție 24.** O inversiune a unei permutări  $\alpha \in S_n$  este o pereche  $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$  cu proprietatea că  $i < j$  și  $\alpha(i) > \alpha(j)$ . Notând cu  $inv(\alpha)$  numărul inversiunii permutării  $\alpha$ , *signatura permutării*  $\alpha$  este

$$sgn(\alpha) = (-1)^{inv(\alpha)}.$$

O permutare se numește pară dacă are un număr par de inversiuni și deci sinatura  $+1$ , respectiv impară dacă numărul inversiunilor sale este impar, iar signatura  $-1$ .

**Observație 25.** Orice transpoziție are un număr impar de inversiuni. Într-adevăr, dacă  $t = (i, j)$  este o transpoziție, cu  $i < j$ , atunci inversiunile permutării  $t$  sunt date de perechea  $(i, j)$  și toate perechile de forma  $(i, k)$  și  $(k, j)$ , unde  $i < k < j$ . Numărul acestora este  $1 + 2(j - i - 1)$ , deci impar. În consecință, orice transpoziție este o permutare impară și are signatura  $-1$ .

**Observație 26.** Direct din definiție rezultă că

$$sgn(\alpha) = \prod_{\{i,j\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}} \frac{\alpha(i) - \alpha(j)}{i - j}.$$

**Propoziție 27.** Pentru orice  $\alpha, \beta \in S_n$  are loc egalitatea  $sgn(\alpha\beta) = sgn(\alpha) \cdot sgn(\beta)$ .

**Demonstrație.** Ținând cont de observația de mai sus, precum și de faptul că pentru bijecția  $\beta$ , atunci când submulțimile  $\{i, j\}$  parcurg toate submulțimile cu 2 elemente ale lui  $[1, n] \cap \mathbb{N}$  și  $\{\beta(i), \beta(j)\}$  vor parcurge toate aceste submulțimi, avem că

$$\begin{aligned} sgn(\alpha\beta) &= \prod_{\{i,j\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}} \frac{\alpha\beta(i) - \alpha\beta(j)}{i - j} = \prod_{\{i,j\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}} \frac{\alpha\beta(i) - \alpha\beta(j)}{\beta(i) - \beta(j)} \cdot \frac{\beta(i) - \beta(j)}{i - j} = \\ &= \prod_{\{i,j\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}} \frac{\alpha\beta(i) - \alpha\beta(j)}{\beta(i) - \beta(j)} \cdot \prod_{\{i,j\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}} \frac{\beta(i) - \beta(j)}{i - j} = \\ &= \prod_{\{k,l\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}} \frac{\alpha(k) - \alpha(l)}{k - l} \cdot \prod_{\{i,j\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}} \frac{\beta(i) - \beta(j)}{i - j} = sgn(\alpha) \cdot sgn(\beta). \end{aligned}$$

□

**Corolar 28.** Produsul a două permutări pare este o permutare pară.

**Corolar 29.** Paritatea unei permutări este dată de numărul de transpoziții dintr-o descompunere a permutării în produs de transpoziții.

**Corolar 30.** Un ciclu  $c$  de lungime  $l(c) = l$  este permutare pară dacă și numai dacă  $l$  este un număr impar.

**Corolar 31.** O permutare este pară dacă și numai dacă în descompunerea sa în produs de cicluri disjuncte, numărul ciclurilor de lungime pară este par.

**Propoziție 32.** Fie  $\sigma \in S_n$  o permutare de grad  $n$  având descompunerea în cicluri disjuncte (inclusiv ciclurile de lungime 1, corespunzătoare punctelor fixe ale lui  $\sigma$ )  $\sigma = c_1 c_2 \dots c_k$ . Atunci:

a)  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{n-k}$ .

b) dacă  $\sigma$  conține în descompunerea de mai sus  $k_1$  cicluri netriviiale (i.e., de lungime  $\geq 2$ ), iar  $|M(\sigma)| = m$ , atunci  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{m-k_1}$ .

**Demonstrație.** a)  $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(c_1 c_2 \dots c_k) = \text{sgn}(c_1) \cdot \text{sgn}(c_2) \cdot \dots \cdot \text{sgn}(c_k) = (-1)^{l(c_1)-1} \cdot (-1)^{l(c_2)-1} \cdot \dots \cdot (-1)^{l(c_k)-1} = (-1)^{l(c_1)+l(c_2)+\dots+l(c_k)-k} = (-1)^{n-k}$ .

b) Evident,  $|F(\sigma)| = n - m = k - k_1$ , astfel că  $n - k = m - k_1$  și deci  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{m-k_1}$ . □

**Observație 33.** a) Dacă  $c = (i_1, i_2, \dots, i_l)$  este o permutare ciclică, inversa sa este  $c^{-1} = (i_l, i_{l-1}, \dots, i_2, i_1)$ .

b) Dacă  $\sigma \in S_n$  are descompunerea în cicluri disjuncte  $\sigma = c_1 c_2 \dots c_k$ , atunci  $\sigma^{-1} = c_1^{-1} c_2^{-1} \dots c_k^{-1}$ .

c) Dacă  $\sigma \in S_n$  se descompune în produs de transpoziții sub forma  $\sigma = t_1 t_2 \dots t_m$ , atunci  $\sigma^{-1} = t_m t_{m-1} \dots t_2 t_1$ .

**Corolar 34.** Inversa unei permutări pare este o permutare pară.

**Notăție 35.**  $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \text{sgn}(\sigma) = 1\}$  este mulțimea tuturor permutărilor pare de grad  $n$  (grupul altern de grad  $n$ ).

**Observație 36.** Se pot verifica ușor următoarele identități:

a)  $(i, j) = (1, i)(1, j)(1, i)$ ,  $(\forall) i, j \geq 2, i \neq j$ .

b)  $(i, j) = (i, i+1)(i+1, i+2)(i+2, i+3) \dots (j-2, j-1)(j-1, j)(j-2, j-1) \dots (i+1, i+2)(i, i+1)$ ,  $(\forall) 1 \leq i < j \leq n$ .

**Corolar 37.** a) Orice permutare de grad  $n$  se poate scrie ca produs de transpoziții de forma  $(1, i)$ , cu  $2 \leq i \leq n$ . Spunem că  $S_n$  este generat de transpozițiile  $(1, i)$ ,  $2 \leq i \leq n$ .

b) Orice permutare de grad  $n$  se poate scrie ca produs de transpoziții de forma  $(i, i+1)$ , cu  $1 \leq i \leq n-1$ .

**Notăție 38.** Proprietățile din corolarul de mai sus se pot scrie sub forma:

a)  $S_n = \langle (1, i) \mid 2 \leq i \leq n \rangle$ .

b)  $S_n = \langle (i, i+1) \mid 1 \leq i \leq n-1 \rangle$ .

**Observație 39.** Au loc identitățile:

a)  $(i, j)(i, j) = id$ .

b)  $(i, j)(i, k) = (i, k, j)$ .

c)  $(i, j)(k, l) = (i, k, j)(i, k, l)$ .

**Corolar 40.**  $A_n = \langle (i, j, k) \mid i, j, k = \overline{1, n}, i \neq j \neq k \neq i \rangle$ .

**Observație 41.** Au loc identitățile:

a)  $(1, i, j) = (1, 2, j)(1, 2, j)(1, 2, i)(1, 2, j)$ ,  $(\forall) i, j \geq 3, i \neq j$ .

b)  $(2, i, j) = (1, 2, i)(1, 2, j)(1, 2, i)(1, 2, i)$ ,  $(\forall) i, j \geq 3, i \neq j$ .

c)  $(i, j, k) = (1, 2, k)(1, 2, i)(1, 2, j)(1, 2, k)(1, 2, i)$ ,  $(\forall) i, j, k \geq 3, i \neq j \neq k \neq i$ .

**Corolar 42.**  $A_n = \langle (1, 2, i) \mid 3 \leq i \leq n \rangle$ .