Clasa a X-a - Etapa 3 - Problema 3

Enunţ. *Fie* $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ *fixat cu* $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ *şi mulţimea* $M = \{az + b\overline{z}\,|a, b \in \mathbb{R}\}$.

a) *Demonstraţi că* $\mathbb{R} \subset M$;

b) *Calculaţi* $\mathbb{C} - M$.

Soluţie. Fie $z = x + iy$.

a) Fie $r \in \mathbb{R}$. Alegând $a = b = \frac{r}{2x}$,obţinem $r = az + b\overline{z} \in M$ şi apoi concluzia.

b) Vom avea $\mathbb{C} - M = \varnothing$. Ântr-adevăr, dacă $w \in \mathbb{C}$, există $a, b \in \mathbb{R}$ cu $w = az + b\overline{z}$. Este suficient să remarcăm că avem şi $\overline{w} = a\overline{z} + bz$.Rezolvăm sistemul cu necunoscutele a şi b, de unde obţinem concluzia. $\square$