Clasa a X-a - Problema 4

Enunţ: Fie $a_1, a_2, ..., a_{2018} \in \mathbb{N}$, distincte, pentru care $\{1,2,3,...,2018\} = \{a_1, a_2, ..., a_{2017}\}$ şi mulţimea $A = \{|a_i - i|,\ i \in \{1,2,3,...,2018\}\}$.

a) Să se arate că $A \subseteq \{0,1,2,....,2017\}$;

b) Să se arate că mulţimea A are cel mult 2017 elemente.

Soluţie:

a) Avem $1 \le a_i \le 2018$, pentru orice $i \in \{1,2,3,..,2018\}$, de unde $-2017 \le a_i - i \le 2017$, ceea ce echivalează cu concluzia.

b) Presupunem că A are 2018 elemente. Atunci $A = \{0,1,2,...,2017\}$. Atunci $\sum_{i=1}^{2018} |a_i - i| = \frac{2018 \cdot 2017}{2} = 2017 \cdot 1009$. Dar $\sum_{i=1}^{2018} (a_i - i) = 0$. Deoarece x şi $|x|$ au aceeaşi paritate, pemtru orice $x \in \mathbb{Z}$, deducem că sumele $\sum_{i=1}^{2018} |a_i - i|$ şi $\sum_{i=1}^{2018} (a_i - i)$ trebuie să admită eceeaşi paritate, ceea ce conduce la contradicţie.