

Problema 4. Se consideră mulțimea

$$A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, 2x - 3y = 1, x, y \leq n\}.$$

Determinați n număr natural știind că mulțimea A conține 671 de elemente.

Mihai Bunget

Soluție: Din relația $2x - 3y = 1$ deducem că y este impar, așadar $y = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Din relația inițială $2x = 3y + 1$ sau $2x = 3(2k + 1) + 1$, de unde $2x = 6k + 4$. Împărțind cu 2 obținem $x = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$.

Cum mulțimea A are 671 de elemente trebuie să avem $k \in \{0, 1, 2, \dots, 670\}$, ceea ce înseamnă că valoarea maximă a lui x este $3 \cdot 670 + 2 = 2012$.

Din condiția $x \leq n$ deducem că $n \in \{2012, 2013, 2014\}$. Dacă $n = 2015$, atunci $2015 = 3 \cdot 671 + 2$, așadar $x = 2015$ și perechea $(2015, 1343)$ ar fi element în mulțimea A . În această situație mulțimea A ar avea 672 de elemente.