

Clasa a X-a - Etapa 7 - Problema 4

Enunț: Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC . Construim șirul de triunghiuri $(A_n B_n C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $A_0 B_0 C_0 = ABC$ iar pentru triunghiul $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$, măsurile unghiurilor sale sunt definite prin $\widehat{A}_{n+1} = \frac{\pi - \widehat{A}_n}{2}$, $\widehat{B}_{n+1} = \frac{\pi - \widehat{B}_n}{2}$, $\widehat{C}_{n+1} = \frac{\pi - \widehat{C}_n}{2}$ iar raza cercului circumscris R_{n+1} este egală cu $\sqrt{2R_n r_n}$, unde R_n , r_n sunt raza cercului circumscris, respectiv înscris triunghiului $A_n B_n C_n$. Să se arate că:

- Dacă S_n reprezintă aria triunghiului $A_n B_n C_n$, atunci șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este constant;
- Să se demonstreze că șirul $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător.