Problema 3
Etapa 4

Clasa a IX – a

Problema 3. Se consideră un pentagon convex *ABCDE* şi un punct *P* situat pe segmentul *[DE]*. Notând cu G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor *ADE, APB, ABC,* respectiv APC, demonstraţi că $G_1G_2G_3G_4$ este un paralelogram dacă şi numai dacă *P* este mijlocul segmentului *[DE]*.

Marian Ionescu, Piteşti

Soluţie:

○ Notăm $\frac{DP}{PE} = k$ şi astfel, pentru orice punct *M* din plan, avem: $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{k+1} \cdot \overrightarrow{MD} + \frac{k}{k+1} \cdot \overrightarrow{ME}$.

○ ipoteza conduce la $\overrightarrow{MG_1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}\right)$,

$\overrightarrow{MG_2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \frac{1}{k+1} \cdot \overrightarrow{MD} + \frac{k}{k+1} \cdot \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MB}\right)$, $\overrightarrow{MG_3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$,

$\overrightarrow{MG_4} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \frac{1}{k+1} \cdot \overrightarrow{MD} + \frac{k}{k+1} \cdot \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MC}\right)$.

○ $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram dacă şi numai dacă $\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{MG_3} = \overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{MG_4}$, egalitate care, ţinând cont de relaţiile anterioare, este echivalentă cu $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \frac{2}{k+1} \cdot \overrightarrow{MD} + \frac{2k}{k+1} \cdot \overrightarrow{ME}$; cum $\overrightarrow{MD}$ şi $\overrightarrow{ME}$ nu sunt coliniari, rezultă $k = 1$ şi concluzia este imediată.