

Serii de puteri și funcții generatoare

lect.dr. Mihai Chiș
Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea de Vest din Timișoara

Viitori Olimpici, ediția a 11-a, etapa a 3-a, clasa a XI-a

1 Serii de puteri

Definiție 1.1. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale, iar $a \in \mathbb{R}$ un număr real oarecare fixat. Seria de puteri centrată în a cu coeficienții a_n , $n \in \mathbb{N}$, este

$$a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + a_3(x - a)^3 + \dots + a_n(x - a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n.$$

Mulțimea de convergență a acestei serii este

$$\mathcal{K} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n \text{ - convergentă} \right\}.$$

Observație 1.2. 1) Mulțimea \mathcal{K} este nevidă, deoarece $a \in \mathcal{K}$.

2) Fie $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ și $\delta = |x_0 - a|$. Folosind criteriile de comparație rezultă atunci că

$$x_0 \in \mathcal{K} \implies (a - \delta, a + \delta) \subseteq \mathcal{K},$$

respectiv

$$x_0 \notin \mathcal{K} \implies \mathcal{K} \subseteq (a - \delta, a + \delta).$$

Teoremă 1.3. (Abel-Cauchy-Hadamard)

Pentru seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ există un număr real $R \in [0, \infty]$ (numit rază de convergență) cu proprietatea că

$$(a - R, a + R) \subseteq \mathcal{K} \subseteq [a - R, a + R].$$

În plus, convergența este absolută și uniformă pe orice interval $(a - r, a + r) \subset (a - R, a + R)$. Raza de convergență R este dată de $R = \frac{1}{\omega}$ (notațiile sunt "tradiționale"), unde

$$\omega = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Observație 1.4. 1) Mai sus am folosit convențiile obișnuite $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$.
 2) Dacă $R = \infty$, atunci $\mathcal{K} = \mathbb{R}$.

Demonstrație. Fie $R \in [0, \infty]$ definit ca în enunțul teoremei. Pentru orice $r < R$ și orice $x \in (a - r, a + r)$ avem că

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x - a)^n|} = \frac{|x - a|}{R} < \frac{r}{R} < 1,$$

astfel că, conform criteriului rădăcinii al lui Cauchy, seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ este absolut convergentă.

Dacă $x \in \mathbb{R} \setminus [a - R, a + R]$, atunci

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x - a)^n|} = \frac{|x - a|}{R} > 1,$$

astfel că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ este divergentă. □

Importanța seriilor de puteri este dată de faptul că valorile funcțiilor cu care lucrăm în mod obișnuit (de obicei funcții elementare, indefinit derivabile pe intervalele din domeniile lor de definiție) sunt aproape întotdeauna approximate pornind de la dezvoltările acestora în serie de puteri în jurul vreunui punct. Proprietatea de bază este (într-o formulare neriguroasă)

Propoziție 1.5. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă, și $a \in \text{Int}(D)$. Atunci există un interval $I \subseteq D$ centrat în a cu proprietatea că

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \dots, \quad (\forall)x \in I.$$

Observație 1.6. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$ se numește seria Taylor asociată funcției f în punctul a .

Exemplu 1.7. Dezvoltările în punctul $a = 0$ ale câtorva dintre funcțiile cele mai des folosite sunt:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (\forall)x \in \mathbb{R};$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (\forall)x \in \mathbb{R};$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad (\forall)x \in \mathbb{R};$$

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad (\forall)x \in (-1, 1);$$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad (\forall)x \in (-1, 1]; \\ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots\right), \quad (\forall)x \in (-1, 1); \\ \operatorname{arctg}(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad (\forall)x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

2 Funcții generatoare

Definiție 2.1. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale. O funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește funcție generatoare asociată șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dacă

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (\forall)x \in D.$$

Exemplu 2.2. 1) Șirul $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ al puterilor unui număr real a are funcția generatoare

$$f : \left(-\frac{1}{|a|}, \frac{1}{|a|}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1-ax};$$

2) Șirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ al invereselor numerelor naturale nenule are funcția generatoare

$$f : [-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -\ln(1-x).$$

Propoziție 2.3. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale care verifică relația de recurență liniară de ordin k cu coeficienți constanți

$$a_{n+k} = c_{k-1}a_{n+k-1} + c_{k-2}a_{n+k-2} + \dots + c_1a_{n+1} + c_0a_n, \quad (\forall)n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Atunci funcția generatoare asociată șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are forma

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{P(x)}{1 - \sum_{j=0}^{k-1} c_j x^{k-j}},$$

unde $P \in \mathbb{R}[X]$ este un polinom de grad cel mult $k-1$, ai cărui coeficienți se pot determina în funcție de termenii inițiali a_0, a_1, \dots, a_{k-1} ai șirului.

Demonstrație. Din relația de recurență și definiția funcției generatoare, notând $Q_j(x) = \sum_{i=0}^{j-1} a_i x^i$, rezultă că

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} x^{n+k} = Q_k(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k-1} c_j a_{n+j} \right) x^{n+k} +$$

$$\begin{aligned}
 &= Q_k(x) + \sum_{j=0}^{k-1} c_j x^{k-j} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+j} x^{n+j} \right) = Q_k(x) + \sum_{j=0}^{k-1} c_j x^{k-j} (f(x) - Q_j(x)) = \\
 &= f(x) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} c_j x^{k-j} + \left(Q_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j x^{k-j} Q_j(x) \right) = f(x) \cdot \sum_{j=0}^{k-1} c_j x^{k-j} + P(x).
 \end{aligned}$$

Evident $P(x) = Q_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j x^{k-j} Q_j(x)$ este un polinom de grad cel mult $k-1$ și rezultă acum afirmația din enunț. \square

Observație 2.4. Considerând ecuația

$$r^k - \sum_{j=0}^{k-1} c_j r^j = 0, \quad (2)$$

numită ecuația caracteristică asociată recurenței liniare cu coeficienți constanți (1), având rădăcinile r_1, r_2, \dots, r_l cu multiplicitățile m_1, m_2, \dots, m_l , are loc relația

$$1 - \sum_{j=0}^{k-1} c_j x^{k-j} = \prod_{i=1}^l (1 - r_i x)^{m_i}.$$

Corolar 2.5. Expresia funcției caracteristice asociate recurenței (1) are forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^l \frac{A_i(x)}{(1 - r_i x)^{m_i}},$$

unde $A_i \in \mathbb{R}[X]$ sunt polinoame de grade $\partial(A_i) \leq m_i - 1$.

Observație 2.6. Dezvoltarea în serie de puteri a funcției $g : \left(-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{(1-rx)^m}$ este

$$\frac{1}{(1-rx)^m} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{m+n-1}^n r^n x^n.$$

Corolar 2.7. Expresia termenului general a_n al unui șir care verifică relația de recurență (1) este

$$a_n = \sum_{i=1}^l P_i(n) r_i^n,$$

unde r_1, r_2, \dots, r_l sunt rădăcinile ecuației caracteristice (2) cu multiplicitățile m_1, m_2, \dots, m_l , iar $P_i \in \mathbb{R}[X]$ sunt polinoame de grade $\partial(P_i) \leq m_i - 1$.

Exemplu 2.8. Pentru șirul $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ al lui Fibonacci, definit prin $F_0 = 0, F_1 = 1$ și $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, funcția generatoare are expresia

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Ecuția caracteristică $r^2 - r - 1 = 0$ are rădăcinile simple $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ și $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Pentru funcția generatoare obținem atunci expresia

$$f(x) = \frac{1}{r_1 - r_2} \cdot \left(\frac{1}{1 - r_1 x} - \frac{1}{1 - r_2 x} \right),$$

astfel că expresia termenului general al șirului lui Fibonacci este

$$F_n = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Exemplu 2.9. Un alt exemplu celebru de șir recurent este șirul $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ al numerelor lui Catalan definit prin $T_0 = 0, T_1 = 1$ și $T_n = \sum_{k=1}^{n-1} T_k \cdot T_{n-k}, (\forall)n \geq 2$. Numerele lui Catalan modelează, de exemplu, numărul de moduri în care pot fi puse parantezele pentru a grupa factorii unui produs de n factori. Ținând cont de relația de recurență, funcția generatoare f asociată numerelor lui Catalan verifică relația

$$f^2(x) = f(x) - x.$$

Cum $f(0) = 0$, expresia funcției generatoare este atunci

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Identificând coeficienții dezvoltării în serie Taylor a funcției f , obținem atunci că

$$\begin{aligned} T_n &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(-\frac{2n-3}{2}\right) \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot 4^n = \\ &= \frac{(2n-3)!! \cdot 2^n}{2 \cdot n!} = \frac{(2n-2)! \cdot 2^{n-1}}{n! \cdot (2n-2)!!} = \frac{(2n-2)!}{n! \cdot (n-1)!} = \frac{1}{n} \cdot C_{2n-2}^{n-1}. \end{aligned}$$