Problema 3

Să se demonstreze că nu există funcţii de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ avem $f(x) \in \mathbb{Q}$.

$***$

Soluţie. Presupunem că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$ cu $a \neq 0$ are proprietatea din enunţ. Atunci avem $f(\sqrt{2})+f(-\sqrt{2}) = 4a+2c$ şi $f(\sqrt{3})+f(-\sqrt{3}) = 6a+2c$, de unde rezultă că $a = \frac{1}{2}[f(\sqrt{2})+f(-\sqrt{2})-$ $-f(\sqrt{3}) - f(-\sqrt{3})]$ şi $c = \frac{1}{2}[2f(\sqrt{3}) + 2f(-\sqrt{3}) - f(\sqrt{2}) - f(\sqrt{2})]$. Cum numerele $f(\sqrt{2}), f(-\sqrt{2}), f(\sqrt{3})$ şi $f(-\sqrt{3})$ sunt numere raţionale, deducem că a şi c sunt numere raţionale. Deoarece $f(\sqrt{2}) = 2a+b\sqrt{2}+c$ este raţional, rezultă că $b = 0$. Dar atunci $f(\sqrt[4]{2}) = \sqrt{2}a + c$ nu este raţional, contradicţie cu ipoteza!