Clasa a X-a - Etapa 2 - Problema 2

Enunţ. Determinaţi toate numerele reale $x > 0$ pentru care $[\lg x] = \lg [x]$.

Soluţie. Din $[\lg x] = k \in \mathbb{Z}$ avem $[x] = 10^k$, deci $k \in \mathbb{N}$. Observăm că valoarea $k = 0$ conduce la $x = 1$ care verifică relaţia din enunţ. Pentru $k \neq 0$, fie $r = \{x\}$, deci $x = 10^k + r$. Atunci $10^k \leq x < 10^k + 1 < 10^{k+1}$ deci $k \leq \lg x < k + 1$. Obţinem $[\lg x] = k$. În concluzie

$$S = \{1\} \cup \left\{ 10^k + r \,|k \in \mathbb{N}^*, r\, [0, 1) \right\}.$$

$\square$