

Clasa a X-a - Etapa 2

Problema 2. Fie $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât cel puțin unul dintre ele nu este pătrat perfect. Să se arate că, dacă

$$\sqrt[3]{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b},$$

atunci $a = b$.

Soluție: Fie $x = \sqrt{a}$ și $y = \sqrt{b}$. Avem $\sqrt[3]{x^2 - y^2} = x - y$, echivalent $x^2 - y^2 = (x - y)^3$, adică $(x - y)(x^2 - 2xy + y^2 - x + y) = 0$.

Dacă $x = y$ atunci $a = b$.

Dacă $x^2 - 2xy + y^2 - x + y = 0$, rezultă $(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$, de unde $y = 0$ și apoi $x = 0$, adică $a = b$.