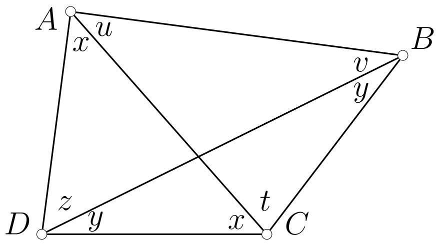
Concursul Gazeta Matematică și ViitoriOlimpici.ro
Etapa finală
Câmpulung Muscel, 15 august 2018
Clasa a IX-a

Problema 1. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu lungimile laturilor $AB = a$, $BC = CD = DA = b$. Să se arate că $A + B \leqslant 180°$ dacă şi numai dacă $a \geqslant b$.

Gazeta Matematică nr. 6-7-8/2018

Soluție. Observăm mai întâi că, în condițiile problemei, avem $A+B = 180° \iff AD \parallel BC \iff ABCD$ romb $\iff a = b$.



Dacă $A + B < 180°$, presupunem prin absurd că $a < b$. Cu notațiile din figură avem:

- în triunghiul ABC, $a < b \Rightarrow t < u \Rightarrow x + t < x + u \Rightarrow C < A$
- în triunghiul ABD, $a < b \Rightarrow z < v \Rightarrow y + z < y + v \Rightarrow D < B$

Așadar $C + D < A + B < 180°$, ceea ce contrazice $A + B + C + D = 360°$

Reciproc, dacă $a > b$, atunci:

- în triunghiul ABC, $a > b \Rightarrow t > u \Rightarrow x + t > x + u \Rightarrow C > A$
- în triunghiul ABD, $a > b \Rightarrow z > v \Rightarrow y + z > y + v \Rightarrow D > B$

Așadar $C + D > A + B$ și, cum $A + B + C + D = 360°$ rezultă că $A + B < 180°$.

Problema 2. Fie x un număr real. Arătați că șirul $(\{nx\})_{n\geqslant 1}$ este monoton dacă și numai dacă $x \in \mathbb{Z}$.

(Prin $\{a\}$ s-a notat partea fracționară a numărului real a).

ViitoriOlimpici, problema 2, etapa 4

Soluție. Fie $(a_n)_{n\geqslant 1}, a_n = \{nx\}$ șirul din enunț. Dacă $x \in \mathbb{Z}$ atunci $nx \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și atunci $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Orice șir constant este monoton.

Reciproc, să presupunem că șirul $(a_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton. Atunci avem (I) $a_{n+1} - a_n \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ sau (II) $a_{n+1} - a_n \leqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $[x] = a$ și $\{x\} = b$, atunci $x = a + b, a \in \mathbb{Z}, b \in [0, 1)$. Din $\{nx\} = \{na + nb\} = \{nb\}$ rezultă $a_n = \{nb\}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și $a_{n+1} - a_n = b + [nb] - [(n + 1)b], \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Avem $nb - 1 < [nb] \leqslant nb$ și $-nb - b \leqslant -[(n + 1)b] < -nb - b + 1$ de unde, prin adunare, $-b-1 < [nb]-[(n+1)b] < -b+1$. Cum $b \in [0, 1)$ și $[nb]-[(n+1)b] \in \mathbb{Z}$ rezultă că $[nb] - [(n + 1)b] \in \{0, -1\}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Prin urmare, $a_{n+1} - a_n \in \{b, b - 1\}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă există $m \in \mathbb{N}^*$ pentru care $a_{m+1} - a_m = 0$, atunci $0 \in \{b, b - 1\}$ și, cum $b \in [0, 1)$, obținem $b = 0$, adică $x \in \mathbb{Z}$. În caz contrar avem de analizat două cazuri:

Cazul I. $a_{n+1} - a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $a_{n+1} - a_n = b, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică șirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică cu rația $b > 0$. Obținem $a_n = nb, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $a_n \in [0, 1), \forall n \in \mathbb{N}^*$, deducem că $n < \frac{1}{b}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, absurd!

Cazul II. $a_{n+1}-a_n<0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $a_{n+1}-a_n=b-1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ adică șirul $(a_n)_{\in \mathbb{N}^*}$ este o progresie aritmetică cu rația $b-1$. Obținem $a_n=n(b-1)+1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $a_n \in [0,1), \forall n \in \mathbb{N}^*$, deducem că $n \leqslant \frac{1}{1-b}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, absurd!

Problema 3. Fie $f:(0,\infty) \to (0,\infty)$ o funcție cu proprietatea că $f(x)+f(y) \geqslant 2f(x+y), \forall x,y \in (0,\infty)$.

a) Demonstrați că $\forall x,y,z \in (0,\infty)$ are loc inegalitatea $f(x)+f(y)+f(z) \geqslant 3f(x+y+z)$.

b) Demonstrați că $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$ și $\forall x_1,x_2,\ldots,x_n \in (0,\infty)$ are loc inegalitatea $f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n) \geqslant n \cdot f(x_1+x_2+\ldots+x_n)$.

Mihai Piticari

Soluție. **a)** Pentru orice $x,y,z \in (0,\infty)$ au loc relațiile:

$$f(x)+f(y)+2f(z) \geqslant 2f(x+y)+2f(z) \geqslant 4f(x+y+z)$$
$$f(y)+f(z)+2f(x) \geqslant 2f(y+z)+2f(x) \geqslant 4f(x+y+z)$$
$$f(z)+f(x)+2f(y) \geqslant 2f(z+x)+2f(y) \geqslant 4f(x+y+z)$$

Adunăm membru cu membru cele trei inegalități și obținem $4(f(x)+f(y)+f(z)) \geqslant 12f(x+y+z)$, de unde rezultă imediat concluzia.

b) Fie că $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$ și $a_1,a_2,\ldots,a_n \in (0,\infty)$. Folosind succesiv inegalitatea din enunț, putem scrie:

$$\begin{gathered} f(a_1)+f(a_2)+2f(a_3)+2^2f(a_4)+\ldots+2^{n-2}f(a_n) \geqslant \\ \geqslant 2[f(a_1+a_2)+f(a_3)]+2^2f(a_4)+\ldots+2^{n-2}f(a_n) \geqslant \\ \geqslant 2^2 \cdot [f(a_1+a_2+a_3)+f(a_4)]+\ldots+2^{n-2}f(a_n) \geqslant \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \geqslant 2^{n-2} \cdot [f(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})+f(a_n)] \geqslant \\ \geqslant 2^{n-1} \cdot f(a_1+a_2+\ldots+a_n). \end{gathered}$$

Avem așadar inegalitatea:

$$f(a_1)+f(a_2)+2f(a_3)+2^2f(a_4)+\ldots+2^{n-2}f(a_n) \geqslant 2^{n-1} \cdot f(a_1+a_2+\ldots+a_n). \quad (*)$$

În $(*)$ înlocuim, pe rând, numerele $a_1,a_2,\ldots,a_n$ cu toate permutările mulțimii $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ și apoi adunăm cele $n!$ inegalități obținute. În membrul drept vom avea $n! \cdot 2^{n-1} \cdot f(x_1+x_2+\ldots+x_n)$, iar în membrul stâng sumăm "pe coloane". Pe fiecare din primele două coloane, termenul $f(x_i)$ apare de $(n-1)!$ ori iar, pentru $j \geqslant 3$, pe coloana j termenul $2^{j-2}f(x_i)$ apare exact de $(n-1)!$ ori.

Obținem astfel inegalitatea:

$$(n-1)!\Big(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Big) \cdot (1+1+2+2^2+\ldots+2^{n-2}) \geqslant n! \cdot 2^{n-1} f(x_1+x_2+\ldots+x_n).$$

Dacă ținem cont că $1+1+2+2^2+\ldots+2^{n-2}=2^{n-1}$, din ultima relație obținem

$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n) \geqslant n \cdot f(x_1+x_2+\ldots+x_n) \quad \text{(q.e.d.)}$$