Problema 3. Fie ABC un triunghi, $\mathscr{C}$ un cerc care trece prin punctele B şi C şi d o dreaptă care intersectează laturile (AB) şi (AC) în punctele K, respectiv L, şi cercul $\mathscr{C}$ în punctele P şi Q. Paralela prin K la AC intersectează $[BC]$ în S, iar paralela prin L la AB intersectează $[BC]$ în T. Arătaţi că punctele P, Q, S şi T sunt conciclice.

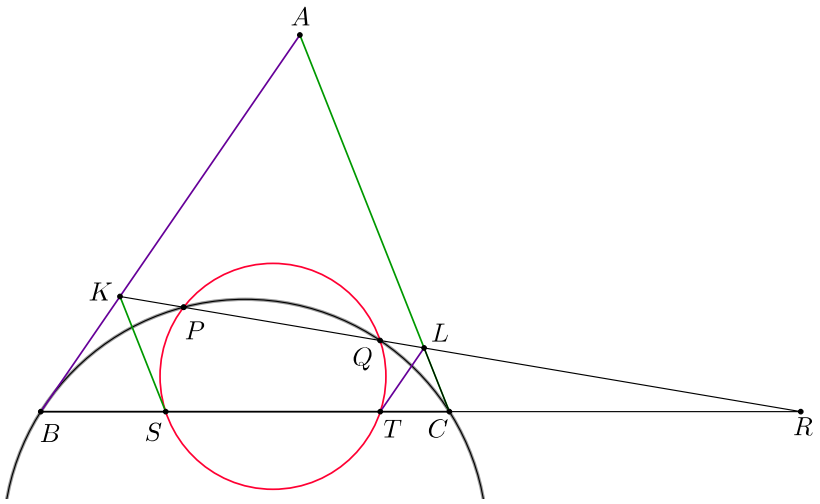
Mihai Miculiţa

Soluţie:
Dacă $d \parallel BC$, atunci $BKLT$ şi $CLKS$ sunt paralelograme, deci triunghiurile BKS şi TLC sunt congruente (LUL), deci segmentele $[BC]$ şi $[ST]$ au acelaşi mijloc. Cum B, C, P şi Q sunt vârfurile unui trapez inscriptibil (adică isoscel), mediatoarele bazelor coincid, deci şi mediatoarele segmentelor $[PQ]$ şi $[ST]$ coincid, adică P, Q, S şi T sunt vârfurile unui trapez isoscel, deci conciclice.

Dacă d nu este paralelă cu BC, notând cu $\{R\} = KL \cap BC$, avem:

$$B, C, P, Q \text{ - conciclice} \Rightarrow RB \cdot RC = RP \cdot RQ \qquad (1).$$

Pe de altă parte, pe baza teoremei lui Thales, din

$$\left.\begin{array}{l} KS \parallel AC \Rightarrow \dfrac{RC}{RS} = \dfrac{RL}{RK} \\ LT \parallel AB \Rightarrow \dfrac{RT}{RB} = \dfrac{RL}{RK} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{RC}{RS} = \frac{RT}{RB} \Leftrightarrow RS \cdot RT = RB \cdot RC \qquad (2).$$

În fine, din relaţiile (1) şi (2), obţinem că $RP \cdot RQ = RS \cdot RT$ şi, cum R este pe prelungirile segmentelor $[ST]$ şi $[PQ]$, din reciproca teoremei puterii punctului rezultă că punctele P, Q, S şi T sunt conciclice.