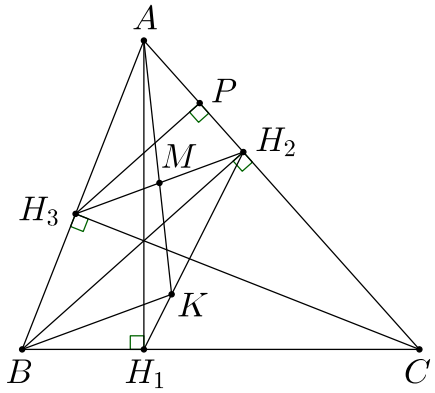
Problema 4. Fie AH_1, BH_2 şi CH_3 înălţimile triunghiului ABC. Punctul M este mijlocul lui $[H_2H_3]$. Dreapta AM intersectează H_1H_2 în punctul K. Demonstraţi că punctul K se află pe linia mijlocie a triunghiului ABC paralelă cu AC.

A. Rudenko, D. Khilko, Olimpiada de geometrie ,,Sharygin", Rusia, 2016

Soluţia oficială: Fie P proiecţia lui H_3 pe AC. Triunghiul H_3PH_2 este dreptunghic şi M este mijlocul ipotenuzei sale, deci $MP = MH_2$ şi $\sphericalangle MPH_2 \equiv \sphericalangle MH_2A$. Dar $\sphericalangle H_1H_2C \equiv \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle H_3H_2A$, de unde $MP \parallel KH_2$. De aici obţinem că $\dfrac{AM}{AK} = \dfrac{AP}{AH_2}$. Triunghiurile AH_2H_3 şi ABC sunt asemenea, deci $\dfrac{AP}{AH_2} = \dfrac{AH_3}{AB}$. Atunci $\dfrac{AM}{AK} = \dfrac{AP}{AH_2} = \dfrac{AH_3}{AB}$ şi $H_3M \parallel BK$. De asemenea, $m(\sphericalangle H_3H_2B) = 90^\circ - m(\sphericalangle H_3H_2A) = 90^\circ - m(\sphericalangle H_1H_2C) = m(\sphericalangle BH_2K)$. Atunci $\sphericalangle H_2BK \equiv \sphericalangle H_3H_2B \equiv \sphericalangle BH_2K$, deci triunghiul BH_2K este isoscel. Este clar că linia mijlocie paralelă cu AC este mediatoarea lui $[BH_2]$, deci trece prin K.