Problema 2. Determinaţi toate perechile de numerele reale (a, b) pentru care $a + b = 1$ şi $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = a^4 + b^4$.

Olimpiadă Estonia

Soluţia 1:
Folosind relaţia $a + b = 1$, rescriem condiţia $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = a^4 + b^4$ sub forma

$$(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = (a^4 + b^4)(a + b).$$

Efectuând calculele, se ajunge la $a^3b^2 + a^2b^3 = a^4b + ab^4$, adică la $ab(a^3 - a^2b - ab^2 + b^3) = 0$ care se descompune în factori $ab(a^2 - b^2)(a - b) = 0$. Deducem că fie $a = 0$ (şi atunci se obţine $b = 1$), fie $b = 0$ (şi atunci $a = 1$), fie $a = b$ (şi atunci se obţine $a = b = \frac{1}{2}$). Cazul $a^2 - b^2 = 0$, adică $0 = (a - b)(a + b) = a - b$, revine tot la $a = b$.
Am obţinut perechile $(0, 1)$, $(1, 0)$ şi $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Toate aceste perechi satisfac relaţiile din enunţ.

Soluţia 2:
Pornim de la $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Folosind $a + b = 1$ şi înlocuind în relaţia $(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) = a^4 + b^4$, obţinem $(a^2 + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 + b^4$. Efectuăm calculele şi ajungem la $ab(a^2 + b^2 - 2ab) = 0$, adică la $ab(a - b)^2$. De aici se finalizează ca în prima soluţie.