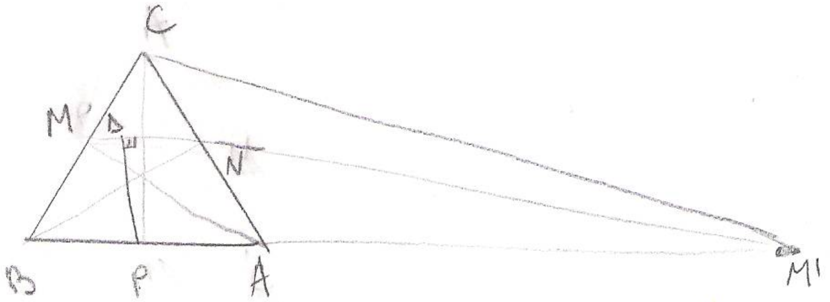
Problema 4

Fie triunghiul ABC si AM, BN, CP, bisectoarele (interioare) unghiurilor triunghiului dat ($M \in BC, N \in AC, P \in AB$). Daca D este proiectia punctului P pe MN, atunci DP este bisectoarea unghiului ADB.

***



Fie $[CM'$ bisectoarea exterioara a ΔABC $\quad M' \in BA$

$\Rightarrow$ f. T. bisectoarei: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{BM}{MC} = \dfrac{BA}{CA} \\ \dfrac{AN}{NC} = \dfrac{AB}{BC} \\ \dfrac{BM'}{M'A} = \dfrac{BC}{CA} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{CM}{BM} \cdot \dfrac{AN}{NC} \cdot \dfrac{BM'}{M'A} = 1 \Rightarrow$ f. R. T. Menelaus

$M - N - M'$ coliniare

OBS. $\widehat{PCM'} = \widehat{PCA} + \dfrac{180^\circ - \hat{C}}{2} = 90^\circ$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} PC \perp CM' \\ PD \perp DM' \end{array}\right\} \Rightarrow PDCM'$ patrulater inscriptibil

$\Rightarrow D \in$ cercului circum $\Delta PCM'$

$\Rightarrow D \in$ cercului lui Apollonius al dreptei BA (pt ΔABC)

cercul lui Apollonius $\Rightarrow \dfrac{DB}{DA} = \dfrac{PB}{PA}$ f. R. T. bisectoarei $\Rightarrow$ DP este bisectoarea unghiului ADB

q.e.d.

OBS. În ΔXYZ cu $(XD$ bisect. interioară și $(XE$ bisect ext $D, E \in YZ$, locul geom. al punctelor M cu prop. că $\frac{MY}{MZ} = \frac{XY}{XZ} = \frac{YD}{DZ}$ este cercul circumscris ΔXDE.

Cercul circumscris ΔXDE se numește și cercul lui Apollonius al dreptei YZ