Olimpiada Naţională de Matematică 2015
Testele de Selecţie Seniori II, III, IV şi V

Abstract. Comments on several of the problems sat at subsequent Senior Selection Tests 2015.

Se adresează claselor IX, X, XI, XII.
Data: 8 iunie 2015.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

La rage, trop de mensonges et de secrets gardés,
La rage, car ils ne veulent pas que ça change (hein),
La rage, parce que mes propos dérangent.[1]

0. Introducere

Aceste comentarii asupra Testelor de Selecţie Seniori II, III, apoi IV şi V (posterioare Testului I de la Olimpiada Naţională 2015) reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului.[2]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile de natură personală.

1. Addendum Materiale Anterioare

Subiectul (4, clasa a IX-a). *Fie $a, b, c, d \geq 0$ numere reale astfel încât $a+b+c+d=1$. Arătaţi că*

$$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{6}+\frac{(c-d)^2}{6}+\frac{(d-b)^2}{6}}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d} \leq 2.$$

Remarcă. **sqing** (un specialist în inegalităţi de pe AoPS) semnalează şi trimite la următoarea problemă de la concursul China Girls' Mathematical Olympiad (CGMO) 2007[3]

[1] Keny Arkana – La Rage `https://www.youtube.com/watch?v=GVIRMo8rrTQ`

[2] Rezultatele finale, printre care componenţa echipelor OIM şi Tuymaada/Yakuţia, la `http://ssmr.ro/files/onm2015/rezultate_baraje_seniori.pdf`
Soluţii oficiale Testul II la `http://ssmr.ro/files/onm2015/Test_2_Solutions.pdf`
Soluţii oficiale Testul III la `http://ssmr.ro/files/onm2015/Test_3_Solutions.pdf`
Soluţii oficiale Testul IV la `http://ssmr.ro/files/onm2015/Test_4_Solutions.pdf`
Soluţii oficiale Testul V la `http://ssmr.ro/files/onm2015/Test_5_Solutions.pdf`

[3] `http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h181047p995272`

Let $a, b, c \geq 0$ be real numbers with $a+b+c=1$. Prove that

$$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \sqrt{3}.$$

şi, în plus, oferă valoarea 1 ca fiind minorant exact pentru expresia care figurează în problema de la clasa a IX-a.

Într-adevăr, este adevărată completa generalizare

Fie $n \geq 2$ şi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale ne-negative astfel încât $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=1$. Arătaţi că

$$1 \leq \sqrt{a_0+\frac{1}{2n}\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i-a_j)^2}+\sum_{1\leq k\leq n}\sqrt{a_k} \leq \sqrt{n+1}.$$

Inegalitatea din dreapta se demonstrează cu aceeaşi metodă ca cea din materialul anterior, cu egalitate pentru $a_k=\dfrac{1}{n+1}$, unde $0 \leq k \leq n$. Inegalitatea din stânga este aproape trivială

$$\sqrt{a_0+\frac{1}{2n}\sum_{1\leq i<j\leq n}(a_i-a_j)^2}+\sum_{1\leq k\leq n}\sqrt{a_k} \geq \sum_{0\leq k\leq n}\sqrt{a_k} \geq \sum_{0\leq k\leq n} a_k = 1,$$

cu egalitate pentru $a_0=1$ şi $a_k=0$, unde $1 \leq k \leq n$.

2. Al Doilea Test de Selecţie – Seniori

Subiectul (1)**.** *Fie a un număr întreg şi fie n un număr natural nenul. Arătaţi că suma $\sum_{k=1}^{n} a^{(k,n)}$ este divizibilă cu n, unde (x,y) este cel mai mare divizor comun al numerelor întregi x şi y.*

Soluţie. Faptul că a este permis a fi negativ este irelevant, căci putem întotdeauna înlocui pe a cu $r \equiv a \pmod{n}$ unde $0 \leq r < n$.

Fie un întreg pozitiv $d \mid n$. Notând $K_d=\{k \mid 1\leq k\leq n, (k,n)=d\}$, va rezulta imediat că $|K_d|=\varphi(n/d)$, deci

$$E_a(n)=\sum_{k=1}^{n} a^{(k,n)}=\sum_{d\mid n}\sum_{k\in K_d} a^d=\sum_{d\mid n}\varphi(n/d)a^d=\sum_{d\mid n}\varphi(d)a^{n/d}.$$

Este interesant că, notând $\exp_a(n)=a^n$, se vede că $\boxed{E_a=\varphi * \exp_a}$, unde

$$(f*g)(n)=\sum_{d\mid n} f(d)g(n/d)$$

este *convoluţia Dirichlet* a funcţiilor aritmetice f şi g, dar această observaţie nu pare să ducă mai departe (acest tip de formulă se mai numeşte şi *formulă Cesàro*). Se pare că singura continuare (posibilă) este prin inducţie. □

Remarcă. Apărută pe AoPS din 7 august 2014 (fără soluţie postată însă).[4] Este extrem de posibil ca problema să fi fost culeasă din Lista Scurtă IMO 2014, care "a transpirat" între timp.

Subiectul (2)**.** *Fie ABC un triunghi. Fie A' centrul cercului determinat de mijlocul laturii BC şi de proiecţiile ortogonale ale vârfurilor B şi C pe dreptele-suport ale bisectoarelor interioare ale unghiurilor ACB, respectiv ABC; punctele B' şi C' sunt definite în mod analog. Arătaţi că cercul Euler al triunghiului ABC şi cercul $A'B'C'$ sunt concentrice.*

Remarcă. Ca de cele mai multe ori, fără comentarii pentru geometrie.

Subiectul (3)**.** *Fie t un număr real strict pozitiv. Determinaţi mulţimile A de numere reale, care îl conţin pe t, pentru care există o mulţime B de numere reale, dependentă de A, $|B| \geq 4$, astfel încât elementele mulţimii $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ să formeze o progresie aritmetică finită.*

Remarcă. Universul ar părea a fi unul de combinatorică aditivă, strâns legat de unele rezultate ale lui Freiman, dar nu! se zice că soluţia este desperat de particulară şi, într-un fel, ne-importantă teoretic. Un punctaj de 7, unul de 3, trei de 1 şi restul 0 (excelent pentru o bună selecţie ...).

Subiectul (4)**.** *O **dreaptă** în laticea $\mathbb{Z}^2$ este o mulţime de forma $\mathbb{Z} \times a$ sau $a \times \mathbb{Z}$, unde a este un număr întreg oarecare; în mod analog, o **dreaptă** în laticea $\mathbb{Z}^3$ este o mulţime de forma $\mathbb{Z} \times a \times b$ sau $a \times \mathbb{Z} \times b$ sau $a \times b \times \mathbb{Z}$, unde a şi b sunt un numere întregi oarecare. O submulţime A a laticei $\mathbb{Z}^2$, respectiv $\mathbb{Z}^3$, este **admisibilă**, dacă A este nevidă, finită, şi orice dreaptă din $\mathbb{Z}^2$, respectiv $\mathbb{Z}^3$, care intersectează pe A, conţine cel puţin două puncte din A. O submulţime N a laticei $\mathbb{Z}^2$, respectiv $\mathbb{Z}^3$, este **nulă**, dacă este nevidă, şi orice dreaptă din $\mathbb{Z}^2$, respectiv $\mathbb{Z}^3$, intersectează pe N într-un număr par de puncte (posibil zero).*

(a) Arătaţi că orice mulţime admisibilă în $\mathbb{Z}^2$ conţine o mulţime nulă.

(b) Daţi un exemplu de mulţime admisibilă în $\mathbb{Z}^3$, care nu are nicio submulţime **proprie** *nulă.*

Soluţie. Există un abuz de notaţie în cele de mai sus. Expresia $\mathbb{Z} \times a$, de exemplu, nu este corect formată, căci a nu este o mulţime; corect ar fi fost $\mathbb{Z} \times \{a\}$. Pentru simplificare, s-a folosit convenţia de a nota singletonul $\{a\}$ tot prin a, dar acest lucru trebuia anunţat. Desigur, orice mulţime nulă finită este admisibilă.

(a) Metoda este clasică, şi aproape forţată în esenţa raţionamentului său; voi arăta chiar mai mult. Fie A admisibilă, şi fie B o submulţime admisibilă a lui A, de cardinalitate minimală. Voi arăta că B este nulă, şi chiar astfel încât orice dreaptă din $\mathbb{Z}^2$ intersectează pe B în 0 sau 2 puncte (evident, $|B| \geq 4$). Înseamnă că, pentru orice $b \in B$, mulţimea $B \setminus \{b\}$ nu mai este admisibilă. Dacă există $h \in B \setminus \{b\}$ astfel încât bh să fie o dreaptă

[4] http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h601300p3569656

orizontală în $\mathbb{Z}^2$, a cărei intersecţie cu B să fie $\{b, h\}$, voi colora $\{b, h\}$ în roşu, iar dacă există $v \in B \setminus \{b\}$ astfel încât bv să fie o dreaptă verticală în $\mathbb{Z}^2$, a cărei intersecţie cu B să fie $\{b, v\}$, voi colora $\{b, v\}$ în albastru. Mulţimea B s-a transformat într-un graf unde fiecare vârf are gradul 1 sau 2 (în care caz cele două muchii incidente sunt de culori diferite). Un astfel de graf este o reuniune disjunctă de lanţuri (de lungimi cel puţin 1) şi/sau cicli (de lungimi pare mai mari decât 2), cu muchiile colorate alternativ roşu/albastru. Atunci

• sau există cicli, dar un ciclu γ este mulţime nulă, şi este imediat vizibil că orice dreaptă din $\mathbb{Z}^2$ intersectează pe γ în 0 sau 2 puncte (deci întreg graful este un ciclu, din minimalitatea lui B);

• sau nu există cicli; fie atunci un lanţ $\lambda \subset B$

  • când capetele lui λ se află pe o dreaptă din $\mathbb{Z}^2$, atunci λ ar fi mulţime nulă, contrazicând minimalitatea lui B;

  • când capetele lui λ nu se află pe o dreaptă din $\mathbb{Z}^2$, atunci $\emptyset \neq B \setminus \lambda$ ar fi mulţime admisibilă, contrazicând minimalitatea lui B.

(b) Pare o naivitate de exprimare a se referi la o submulţime **proprie** nulă; mulţimea $A = \{0, 1\}^3$ este astfel (conform cu observaţia de la începutul soluţiei, se poate lua A ca fiind orice submulţime nulă minimală finită).[5]

Îmi pare clar, mai ales în lumina metodei de la (a), că se intenţiona găsirea unei mulţimi admisibile A fără submulţimi nule, **ea însăşi nefiind nulă** (un model este destul de voluminos şi greu de exhibat). Oare cum se face că nu există scoruri mai mari decât 4 (cu o excepţie 5)? se poate deduce că 4 puncte se atribuiau punctului (a); oare nimeni n-a realizat că punctul (b), aşa cum a fost enunţat, era trivial? sau, de fapt, punctul (b) a fost corectat **aşa cum era el intenţionat**? □

3. Al Treilea Test de Selecţie – Seniori

Subiectul (1). *Fie γ şi γ' două cercuri care se intersectează în punctele A şi B. Tangenta în A la cercul γ' intersectează a doua oară cercul γ în punctul C, tangenta în A la cercul γ intersectează a doua oară cercul γ' în punctul C', iar dreapta CC' separă punctele A and şi B.*

Fie Γ cercul tangent exterior cercului γ, tangent exterior cercului γ' şi tangent dreptei CC', situat de aceeaşi parte a acestei drepte cu punctul B. Arătaţi că cercurile γ şi γ' interceptează segmente de lungimi egale pe una dintre tangentele din punctul A la cercul Γ.

Remarcă. Ca de cele mai multe ori, fără comentarii pentru geometrie.

[5] Iar dacă modificatorul **proprie** a fost **în mod intenţionat** introdus, în chiar ultimul moment, pentru a "uşura" întrebarea, rezultatul obţinut este ridicul.

Există mulţimi nule minimale **infinite**; de exemplu mulţimea

$$N_\omega = \{(0,0)\} \cup \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(n+1, n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Subiectul (2)**.** *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale, astfel încât $a_0 > 1/2$, $a_{n+1} \geq a_n$ şi $b_{n+1} = a_n(b_n + b_{n+2})$, oricare ar fi numărul natural n. Arătaţi că şirul $(b_n)_{n\geq 0}$ este mărginit.*

Remarcă. O problemă mult mai bine adaptată unui concurs de tip Putnam. Metodele sunt tipice domeniului analizei matematice. Doar cinci scoruri de 1, iar restul 0 (chiar şi mai potrivit pentru o bună selecţie, eh?).

Subiectul (3)**.** *Dacă n şi k sunt numere naturale nenule, şi $k \leq n$, notăm cu $M(n,k)$ cel mai mic multiplu comun al numerelor $n, n-1, \ldots, n-k+1$; fie în cele ce urmează $f(n)$ cel mai mare număr natural nenul $k \leq n$, astfel încât $M(n,1) < M(n,2) < \cdots < M(n,k)$. Arătaţi că:*

(a) $f(n) < 3\sqrt{n}$, oricare ar fi numărul natural nenul n; şi

(b) Dacă N este un număr natural nenul, atunci $f(n) > N$, cu excepţia unui număr finit de valori ale lui n.

Soluţie. Avem evident $f(1) = f(2) = 1$, $f(3) = 2$; fie în continuare $n \geq 4$.

(a) Fie întregul (unic) $m \geq 2$ astfel încât $m^2 \leq n < (m+1)^2$. Deoarece $m^2 - m = (m-1)m \mid (m^2-1)m^2$, rezultă

$$M(n, n-(m-1)m+1) = M(n, n-(m-1)m),$$

deci $f(n) \leq n-(m-1)m$. Dar $n-(m-1)m < 3\sqrt{n}$ este echivalent cu $n - 3\sqrt{n} < (m-1)m$; pentru $n \leq 9$ acest lucru este trivial, iar pentru $n > 9$ funcţia $n \mapsto n - 3\sqrt{n}$ este crescătoare, deci

$$n - 3\sqrt{n} < (m+1)^2 - 3(m+1) = (m-1)m - 2 < (m-1)m,$$

şi inegalitatea $\boxed{f(n) < 3\sqrt{n}}$ este demonstrată.

Cu doar un mic efort suplimentar putem obţine o margine sensibil mai bună. Să observăm că dacă $m^2 \leq n < m^2 + m$ atunci, exact ca mai sus, avem $f(n) \leq n - (m-1)m < (m^2+m) - (m^2-m) = 2m \leq 2\sqrt{n}$. Pe de altă parte, dacă $m^2 + m \leq n < (m+1)^2$ atunci, deoarece

$$m^2 - 1 = (m-1)(m+1) \mid (m^2+m-2)(m^2+m),$$

rezultă

$$M(n, n-(m^2-1)+1) = M(n, n-(m^2-1)),$$

deci $f(n) \leq n - (m^2-1)$. Dar $n - (m^2-1) < 2\sqrt{n}$ este echivalent cu $n - 2\sqrt{n} < m^2 - 1$; pentru $n \leq 4$ acest lucru este trivial, iar pentru $n > 4$ funcţia $n \mapsto n - 2\sqrt{n}$ este crescătoare, deci

$$n - 2\sqrt{n} < (m+1)^2 - 2(m+1) = m^2 - 1,$$

şi inegalitatea $\boxed{f(n) < 2\sqrt{n}}$ este demonstrată.[6]

[6] Această margine $2\sqrt{n}$ este destul de bună pentru valori mici ale lui n; de exemplu $f(13) = 7 < 7{,}2 \approx 2\sqrt{13}$. Pe de altă parte, evident $f(n^2) \leq n$, şi pentru multe valori ale lui n avem chiar egalitate; oare este adevărat că acest lucru se întâmplă întotdeauna (probabil nu) şi că deci asimptotica exactă foloseşte $\frac{1}{2}$ ca putere a lui n?

(b) (M. Bocanu) Vom arăta că pentru orice $n > N! + N$ avem $f(n) > N$. Fie $2 \leq k \leq N+1$. Dacă arătăm că $n-k+1 \nmid (n-k+2)\cdots(n-1)n$, atunci evident şi $M(n,k) > M(n,k-1)$, căci $M(n,k-1) \mid (n-k+2)\cdots(n-1)n$. Dar

$$(n-k+2)\cdots(n-1)n = \prod_{\ell=1}^{k-1}((n-k+1)+\ell) \equiv (k-1)! \pmod{n-k+1},$$

şi cum $n-k+1 > (k-1)! > 0$, căci $n > N!+N \geq (k-1)!+(k-1)$, rezultă de fapt că $(k-1)! \not\equiv 0 \pmod{n-k+1}$, exact ceea ce doream.[7] □

Subiectul (4)**.** *Date fiind două numere întregi $h \geq 1$ şi $p \geq 2$, determinaţi numărul minim de perechi de adversari într-un parlament care are exact hp membri, dacă în orice partiţie a parlamentului în h camere a câte p membri fiecare, (cel puţin) una dintre aceste camere conţine (cel puţin) o pereche de adversari.*

Soluţie. Modelul de graf complet h-multipartit $K_{\underbrace{p,p,\ldots,p}_{\text{de } h \text{ ori}}} = K_p^h$ (în notaţia lui R. Diestel) este doar un exemplu care arată cum o alegere **convenabilă** de $M-1 = \dfrac{h(h-1)}{2}p^2$ muchii poate duce la o h-echipartiţie fără muchii în clasele partiţiei, şi că M muchii, **oricum** ar fi ele alese, duc la (măcar) o muchie în (măcar) o clasă, pentru **orice** h-echipartiţie. Dar M nu este răspunsul, căci nouă ni se cere să găsim numărul minim m de muchii care ele, **convenabil** alese, duc la (măcar) o muchie în (măcar) o clasă, pentru **orice** h-echipartiţie. Evident, numărul $m = \dfrac{h(h+1)}{2} = \left|\left|K^{h+1}\right|\right|$ (iarăşi în notaţiile lui R. Diestel) al muchiilor grafului $(h+1)$-complet conduce la concluzia dorită, şi evident $m < M$ pentru $h > 1$.

Ar rămâne de arătat că, pentru **orice** alegere de $m-1$ muchii, **există** o h-echipartiţie fără muchii în clasele partiţiei (trivial, de exemplu, pentru $h = 2$). Ne-ar putea veni în ajutor următorul rezultat elementar

> **Proposition 5.2.1.** (R. Diestel) Every graph G with $||G||$ edges satisfies $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2||G|| + \frac{1}{4}}$ (unde prin $\chi(G)$ este notat numărul cromatic al lui G).
>
> *Proof.* Let c be a vertex colouring of G with $k = \chi(G)$ colours. Then G has at least one edge between any two colour classes; if not, we could have used the same colour for both classes. Thus $||G|| \geq \frac{1}{2}k(k-1)$. Solving this inequality for k, we obtain the assertion claimed. ■

[7] Să remarcăm, la soluţia de la punctul (b), că $f(n) > 2$ pentru $n > 2! + 2 = 4$, dar $f(4) = 2$; la fel, $f(n) > 3$ pentru $n > 3! + 3 = 9$, dar $f(9) = 3$. În unele cazuri deci, rangul $N! + N$ este precis (dar $f(n) > 4$ pentru $n > 4! + 4 = 28$, iar $f(28) = 7$). Se pare că $f(n)$ **nu** devine crescătoare de la un rang încolo!

Dar pentru $\frac{1}{2}k(k-1) \leq ||G|| \leq m-1 = \frac{1}{2}h(h+1)-1 < \frac{1}{2}(h+1)h$, rezultă imediat $\chi(G) = k \leq h$, ceea ce significă existenţa unei partiţii fără muchii; dar aceasta nu este în mod necesar o h-echipartiţie (preconizată), dacă p nu este suficient de mare faţă de h.

În fine, pentru $p \leq \dfrac{h+2}{2}$, numărul $\mu = p(h-1)+1 = \left|\left|K_{1,p(h-1)+1}\right|\right|$ al muchiilor grafului stea conduce la concluzia dorită, şi evident $\mu \leq m$. Pe de altă parte, pentru $p \geq \dfrac{h+2}{2}$ avem $\mu \geq m$, şi concluzia pare a fi că numărul căutat este $\boxed{\min\{m,\mu\}}$ (într-adevăr chiar este! dar soluţia (oficială) apare hidos de complicată).

Enunţul este lejer ambiguu în privinţa cuantificatorilor logici discutaţi mai sus; desigur, eminamente corect astfel cum este dat, putea însă profita de o încercare de clarificare, cu tot pericolul unor redundanţe! dovadă numărul celor care poate "s-au păcălit". Un scor de 5, unul de 2, trei de 1 şi restul 0 (o ultimă încercare – ratată, ca şi celelalte semnalate mai sus – de bună selecţie). □

4. AL PATRULEA TEST DE SELECŢIE – SENIORI

Subiectul (1). *Fie ABC şi ABD două triunghiuri coplanare cu perimetrele egale. Dreptele-suport ale bisectoarelor interioare ale unghiurilor CAD şi CBD se intersectează în punctul P. Arătaţi că unghiurile APC şi BPD sunt congruente.*

Remarcă. Ca de cele mai multe ori, fără comentarii pentru geometrie.

Subiectul (2). *Dat fiind un număr întreg $k \geq 2$, determinaţi numărul maxim de divizori pe care îi poate avea coeficientul binomial $\dbinom{n}{k}$ printre numerele din intervalul $n-k+1, \ldots, n-1, n$, când n parcurge mulţimea numerelor întregi mai mari sau egale cu k.*

Soluţie. Pentru $n = k!$ avem $\dbinom{k!}{k} = \dbinom{n}{k} = (n-k+1)\cdots(n-1)$, aşadar găsim $k-1$ divizori din intervalul dat (anume toţi, mai puţin ultimul).

Polinomul de interpolare Lagrange $L(x) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k-1}\prod_{j\neq\ell}\frac{x-j}{\ell-j}$ are proprietatea că $L(x) = 1$ pentru orice $x \in \{0,1,\ldots,k-1\}$; dat fiind că este de grad $\deg L \leq k-1$, urmează că este polinomul constant egal cu 1. Dar atunci

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k}L(n) = \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}\prod_{j\neq\ell}\frac{n-j}{\ell-j} = \sum_{\ell=0}^{k-1}\pm\binom{k-1}{\ell}\left(\frac{1}{n-\ell}\binom{n}{k}\right),$$

deci nu toate cele k valori $\dfrac{1}{n-\ell}\dbinom{n}{k}$ pot fi numere întregi, cu $0 \leq \ell \leq k-1$. Numărul maxim de divizori căutat este aşadar $\boxed{k-1}$. □

Remarcă. Forma specială a acestui polinom de interpolare Lagrange este bine-cunoscută; tot ”trucul” este să-ţi vină în minte, şi să realizezi că poate trivializa problema. Destul de simpatic, ca aplicaţie.

Subiectul (3)**.** *Fie n un număr natural nenul. Dacă σ este o permutare a primelor n numere naturale nenule, notăm cu $S(\sigma)$ mulţimea tuturor sumelor distincte de forma $\displaystyle\sum_{i=k}^{\ell}\sigma(i)$, unde $1 \leq k \leq \ell \leq n$.*

(a) Daţi un exemplu de permutare σ a primelor n numere naturale nenule, astfel încât $|S(\sigma)| \geq \lfloor (n+1)^2/4 \rfloor$.

(b) Arătaţi că $|S(\sigma)| > n\sqrt{n}/4\sqrt{2}$, oricare ar fi permutarea σ a primelor n numere naturale nenule.

Soluţie. (a) Prin încercări, pare natural să lucrăm cu o permutare σ pentru care sumele parţiale să fie uşor de calculat şi comparat. Permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\ 1 & n & 2 & n-1 & 3 & n-2 & 4 & n-3 & \cdots \end{pmatrix}$$

are astfel de proprietăţi, şi nu este greu de demonstrat că generează cel puţin $\lfloor (n+1)^2/4 \rfloor$ sume parţiale distincte. Ar fi fost interesant de găsit o asimptotică de forma $\max\limits_{\sigma\in\mathcal{S}_n} |S(\sigma)| = Cn^2$, unde $C \leq \dfrac{1}{2}$ este o constantă reală pozitivă absolută, căci evident $|S(\sigma)| \leq \dfrac{1}{2}n(n+1)$.

(b) Acest punct este mult mai complicat, şi probabil că n-a fost soluţionat de nimeni. Aici soluţia oficială menţionează că autorul ajunge la asimptotica $\min\limits_{\sigma\in\mathcal{S}_n} |S(\sigma)| = cn^2$, unde c este o constantă reală pozitivă absolută. □

5. Al Cincilea Test de Selecţie – Seniori

Subiectul (1)**.** *Fie ABC un triunghi. Fie P_1 şi P_2 două puncte pe latura AB, astfel încât P_2 să fie situat pe segmentul BP_1, iar segmentele AP_1 şi BP_2 să fie congruente; în mod analog, Q_1 şi Q_2 sunt două puncte pe latura BC, astfel încât Q_2 să fie situat pe segmentul BQ_1, iar segmentele BQ_1 şi CQ_2 să fie congruente. Segmentele P_1Q_2 şi P_2Q_1 se intersectează în punctul R, iar cercurile P_1P_2R şi Q_1Q_2R se intersectează a doua oară în punctul S, situat în interiorul triunghiului P_1Q_1R. Fie M mijlocul laturii AC. Arătaţi că unghiurile P_1RS şi Q_1RM sunt congruente.*

Remarcă. Ca de cele mai multe ori, fără comentarii pentru geometrie.

Subiectul (2)**.** *Fie n un număr întreg mai mare decât 1 şi fie p un factor prim al lui n. Considerăm ţările care au exact p regiuni şi în fiecare regiune sunt exact n aeroporturi. Într-o fiecare astfel de ţară, p companii aeriene operează numai zboruri interregionale, astfel încât între oricare două aeroporturi situate în regiuni diferite ale ţării există un zbor direct dus-întors operat de către una dintre cele p companii aeriene.*

Determinaţi cel mai mare număr întreg N care are proprietatea că în orice astfel de ţară putem alege una dintre cele p companii aeriene şi N dintre cele np aeroporturi, astfel încât să putem călători (nu neapărat direct) de la oricare dintre cele N aeroporturi alese la oricare altul dintre acestea, doar cu zboruri operate de compania aeriană aleasă.

Într-o clară terminologie de teoria grafurilor (enunţul, aşa cum e dat, cere vreun sfert de oră doar să fie conceptualizat). Considerăm grafurile G complet p-echipartite, cu n vârfuri pe fiecare din cele p maluri. Muchiile lui G sunt colorate cu p culori. Determinaţi cel mai mare număr întreg N cu proprietatea că pentru orice astfel de graf G se pot alege N dintre cele np vârfuri, astfel încât graful indus de ele în G să fie conectat monocromatic.

Soluţie. Am să las soluţia oficială să se lupte cu a arăta, mai întâi printr-un exemplu (nu foarte greu de găsit) că $N \leq n$, şi apoi (printr-un argument mai dificil) că $\max N = n$. □

Subiectul (3). *Fie* $a_0 = 1$ *şi fie* $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. *Fie m un număr natural nenul, fie p un număr prim, şi fie q şi r două numere naturale. Arătaţi că* $a_{p^m q+r} \equiv a_{p^{m-1}q+r} \pmod{p^m}$.

Remarcă. De parcă Problema 2, Testul III, nu era de ajuns, o altă problemă mai potrivită pentru Putnam. Trecerea "seamless" de la şiruri de numere întregi la aplicaţii liniare din spaţiul vectorial $\mathbb{R}[x]$ în $\mathbb{R}$ este elegantă, dar n-are nimic de-a face cu un test de selecţie OIM. Rezultatele vin să sprijine această remarcă; cinci scoruri din mulţimea $\{1, 2, 3\}$, şi restul 0.

Comentariile mele la această serie de Teste de Selecţie sunt cam "sărăcuţe" din punct de vedere matematic, dintr-un motiv foarte clar. Sunt în general dezacord cu tematica şi alegerea majorităţii problemelor, şi sastisit îndeajuns pentru a-mi pierde interesul de a le duce până la capăt. Voi aştepta cu mare curiozitate editarea **RMC 2015** pentru a afla, într-un final, sursa acestor probleme, dar aş putea face încă de pe acum câteva presupuneri probabil foarte corecte (oare câte au fost originale?) şi dezamăgitoare. Un lucru este cert – comunitatea mondială, care lăuda calitatea producţiilor româneşti, se îndreaptă acum, ca şi mine, către, evident, constant bunele probleme ruseşti, dar şi cele din SUA, Iran, Brazilia, şi alte "lesser luminaries" (personal, cu o anume gelozie).

6. Încheiere

Se pare totuşi că măcar cineva citeşte aceste comentarii ale mele; link-ul către MASSEE de pe site-ul SSMR a fost corectat!

Enunţurile şi soluţiile oficiale ale Testelor II şi III au fost în fine postate ... deci moratoriumul de ţinere în umbră a expirat (deşi probabil există printre ele probleme de pe IMO ShortList 2014; era vorba mai ales de probleme din culisele RMM 2014).

Rezultatele acestor ultime două Teste de Selecţie (şi echipa OIM care a rezultat) **nu** par să justifice alegerea generală făcută asupra problemelor. Reiterez – a numi "pregătire" un pachet de două lecţioare este pompos; seamănă cu războiul Anglo-Zanzibar ☺ Echipa putea fi mai puternică, dar la noi selecţia se face cu rigla trasă între scorurile al şaselea şi al şaptelea (când variabilitatea introdusă de proasta corectură este de cel puţin 5%), nu din şi prin responsabilitatea şi experienţa selecţionerilor. S-a mai văzut, şi chiar deseori, în trecut ☹

Deşi rezultatele detaliate au fost postate, pentru conformitate aceasta este situaţia finală, cu echipele OIM şi Yak (Tuymaada (juniori) – Yakuţia) evidenţiate.

Nume	Oraş	Clasa	Total	Echipa
GOLOGAN Radu	Bucureşti	**Leader**		**OIM**
GHERGHE Cătălin Liviu	Bucureşti	**Deputy**		**OIM**
BĂLUNĂ Mihail	Bucureşti	**Observer A**		**OIM**
SPĂTARU Ştefan	Bucureşti	12	95	**OIM**
BOCANU Marius-Ioan	Bucureşti	12	76	**OIM**
ANDRONACHE Teodor Andrei	Bucureşti	11	78	**OIM**
DIACONU Simona	Bucureşti	12	77	**OIM**
PUIU Andrei-Bogdan	Galaţi	12	72	**OIM**
BONCIOCAT Ciprian-Mircea	Bucureşti	9	68	**OIM**
PLOSCARU Ioan Laurenţiu	Rm. Vâlcea	11	66	
GRAUR Andrei Alexandru	Bucureşti	11	58	
ION Filip	Bucureşti	10	55	
PASCADI Alexandru	Bucureşti	10	46	
TUDOSE Ştefan Rareş	Bucureşti	10	45	
DOICA Mihnea Gabriel	Bucureşti	9	44	**Yak**
TELEANU Cristian Florentin	Constanţa	11	37	
TEODORESCU Ioana	Bucureşti	10	37	
DIMA Andreea	Bucureşti	9	26	**Yak**
POPA Ştefan-Cristian	Bucureşti	9	24	**Yak**

(Poziţiile 2,3,4 pentru OIM sunt astfel probabil din acordarea de ultim moment a unor puncte suplimentare (meritate) lui Marius ☻).