

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ 2015
TESTELE DE SELECȚIE SENIORI II, III, IV și V

ABSTRACT. Comments on several of the problems sat at subsequent Senior Selection Tests 2015.

Se adresează claselor IX, X, XI, XII.

Data: 8 iunie 2015.

Autor: Dan Schwarz, București.

La rage, trop de mensonges et de secrets gardés,
La rage, car ils ne veulent pas que ça change (hein),
La rage, parce que mes propos dérangent.¹

0. INTRODUCERE

Aceste comentarii asupra Testelor de Selecție Seniori II, III, apoi IV și V (posteriore Testului I de la Olimpiada Națională 2015) reflectă, ca de obicei, opinia personală a autorului.²

Voi indica prin culoarea **roșie** eventualele erori, sau notațiile abuzive din enunțurile originale, și prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsea din enunț sau soluție). Voi folosi în mod predilect și culoarea **albastră** pentru comentariile de natură personală.

1. ADDENDUM MATERIALE ANTERIOARE

Subiectul (4, clasa a IX-a). *Fie $a, b, c, d \geq 0$ numere reale astfel încât $a + b + c + d = 1$. Arătați că*

$$\sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{6} + \frac{(c-d)^2}{6} + \frac{(d-b)^2}{6}} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 2.$$

Remarcă. sqing (un specialist în inegalități de pe AoPS) semnalează și trimite la următoarea problemă de la concursul China Girls' Mathematical Olympiad (CGMO) 2007³

¹ Keny Arkana – La Rage <https://www.youtube.com/watch?v=GVIRMo8rrTQ>

² Rezultatele finale, printre care componența echipelor OIM și Tuymaada/Yakuția, la http://ssmr.ro/files/onm2015/rezultate_baraje_seniori.pdf
Soluții oficiale Testul II la http://ssmr.ro/files/onm2015/Test_2_Solutions.pdf
Soluții oficiale Testul III la http://ssmr.ro/files/onm2015/Test_3_Solutions.pdf
Soluții oficiale Testul IV la http://ssmr.ro/files/onm2015/Test_4_Solutions.pdf
Soluții oficiale Testul V la http://ssmr.ro/files/onm2015/Test_5_Solutions.pdf

³ <http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h181047p995272>

Let $a, b, c \geq 0$ be real numbers with $a + b + c = 1$. Prove that

$$\sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{4}} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3}.$$

și, în plus, oferă valoarea 1 ca fiind minorant exact pentru expresia care figurează în problema de la clasa a IX-a.

Într-adevăr, este adevărată completa generalizare

Fie $n \geq 2$ și $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ numere reale ne-negative astfel încât $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Arătați că

$$1 \leq \sqrt{a_0 + \frac{1}{2n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2} + \sum_{1 \leq k \leq n} \sqrt{a_k} \leq \sqrt{n+1}.$$

Inegalitatea din dreapta se demonstrează cu aceeași metodă ca cea din materialul anterior, cu egalitate pentru $a_k = \frac{1}{n+1}$, unde $0 \leq k \leq n$. Inegalitatea din stânga este aproape trivială

$$\sqrt{a_0 + \frac{1}{2n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2} + \sum_{1 \leq k \leq n} \sqrt{a_k} \geq \sum_{0 \leq k \leq n} \sqrt{a_k} \geq \sum_{0 \leq k \leq n} a_k = 1,$$

cu egalitate pentru $a_0 = 1$ și $a_k = 0$, unde $1 \leq k \leq n$.

2. AL DOILEA TEST DE SELECȚIE – SENIORI

Subiectul (1). Fie a un număr întreg și fie n un număr natural nenul.

Arătați că suma $\sum_{k=1}^n a^{(k,n)}$ este divizibilă cu n , unde (x, y) este cel mai mare divizor comun al numerelor întregi x și y .

Soluție. Faptul că a este permis a fi negativ este irelevant, căci putem întotdeauna înlocui pe a cu $r \equiv a \pmod{n}$ unde $0 \leq r < n$.

Fie un întreg pozitiv $d \mid n$. Notând $K_d = \{k \mid 1 \leq k \leq n, (k, n) = d\}$, va rezulta imediat că $|K_d| = \varphi(n/d)$, deci

$$E_a(n) = \sum_{k=1}^n a^{(k,n)} = \sum_{d \mid n} \sum_{k \in K_d} a^d = \sum_{d \mid n} \varphi(n/d) a^d = \sum_{d \mid n} \varphi(d) a^{n/d}.$$

Este interesant că, notând $\exp_a(n) = a^n$, se vede că $E_a = \varphi * \exp_a$, unde

$$(f * g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d)g(n/d)$$

este *convoluția Dirichlet* a funcțiilor aritmetice f și g , dar această observație nu pare să ducă mai departe (acest tip de formulă se mai numește și *formulă Cesàro*). Se pare că singura continuare (posibilă) este prin inducție. \square

Remarcă. Apărută pe AoPS din 7 august 2014 (fără soluție postată însă).⁴ Este extrem de posibil ca problema să fi fost culeasă din Lista Scurtă IMO 2014, care "a transpirat" între timp.

Subiectul (2). Fie ABC un triunghi. Fie A' centrul cercului determinat de mijlocul laturii BC și de proiecțiile ortogonale ale vârfurilor B și C pe dreptele-suport ale bisectoarelor interioare ale unghiurilor ACB , respectiv ABC ; punctele B' și C' sunt definite în mod analog. Arătați că cercul Euler al triunghiului ABC și cercul $A'B'C'$ sunt concentrice.

Remarcă. Ca de cele mai multe ori, fără comentarii pentru geometrie.

Subiectul (3). Fie t un număr real strict pozitiv. Determinați mulțimile A de numere reale, care îl conțin pe t , pentru care există o mulțime B de numere reale, dependentă de A , $|B| \geq 4$, astfel încât elementele mulțimii $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ să formeze o progresie aritmetică finită.

Remarcă. Universul ar părea a fi unul de combinatorică aditivă, strâns legat de unele rezultate ale lui Freiman, dar nu! se zice că soluția este disperat de particulară și, într-un fel, ne-importantă teoretic. Un punctaj de 7, unul de 3, trei de 1 și restul 0 (excelent pentru o bună selecție ...).

Subiectul (4). O dreaptă în laticia \mathbb{Z}^2 este o mulțime de forma $\mathbb{Z} \times a$ sau $a \times \mathbb{Z}$, unde a este un număr întreg oarecare; în mod analog, o dreaptă în laticia \mathbb{Z}^3 este o mulțime de forma $\mathbb{Z} \times a \times b$ sau $a \times \mathbb{Z} \times b$ sau $a \times b \times \mathbb{Z}$, unde a și b sunt un numere întregi oarecare. O submulțime A a laticii \mathbb{Z}^2 , respectiv \mathbb{Z}^3 , este admisibilă, dacă A este nevidă, finită, și orice dreaptă din \mathbb{Z}^2 , respectiv \mathbb{Z}^3 , care intersectează pe A , conține cel puțin două puncte din A . O submulțime N a laticii \mathbb{Z}^2 , respectiv \mathbb{Z}^3 , este nulă, dacă este nevidă, și orice dreaptă din \mathbb{Z}^2 , respectiv \mathbb{Z}^3 , intersectează pe N într-un număr par de puncte (posibil zero).

(a) Arătați că orice mulțime admisibilă în \mathbb{Z}^2 conține o mulțime nulă.

(b) Dați un exemplu de mulțime admisibilă în \mathbb{Z}^3 , care nu are nicio submulțime proprie nulă.

Soluție. Există un abuz de notație în cele de mai sus. Expresia $\mathbb{Z} \times a$, de exemplu, nu este corect formată, căci a nu este o mulțime; corect ar fi fost $\mathbb{Z} \times \{a\}$. Pentru simplificare, s-a folosit convenția de a nota singletonul $\{a\}$ tot prin a , dar acest lucru trebuia anunțat. Desigur, orice mulțime nulă finită este admisibilă.

(a) Metoda este clasică, și aproape forțată în esența raționamentului său; voi arăta chiar mai mult. Fie A admisibilă, și fie B o submulțime admisibilă a lui A , de cardinalitate minimală. Voi arăta că B este nulă, și chiar astfel încât orice dreaptă din \mathbb{Z}^2 intersectează pe B în 0 sau 2 puncte (evident, $|B| \geq 4$). Înseamnă că, pentru orice $b \in B$, mulțimea $B \setminus \{b\}$ nu mai este admisibilă. Dacă există $h \in B \setminus \{b\}$ astfel încât bh să fie o dreaptă

⁴ <http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h601300p3569656>

orizontală în \mathbb{Z}^2 , a cărei intersecție cu B să fie $\{b, h\}$, voi colora $\{b, h\}$ în roșu, iar dacă există $v \in B \setminus \{b\}$ astfel încât bv să fie o dreaptă verticală în \mathbb{Z}^2 , a cărei intersecție cu B să fie $\{b, v\}$, voi colora $\{b, v\}$ în albastru. Mulțimea B s-a transformat într-un graf unde fiecare vârf are gradul 1 sau 2 (în care caz cele două muchii incidente sunt de culori diferite). Un astfel de graf este o reuniune disjunctă de lanțuri (de lungimi cel puțin 1) și/sau cicluri (de lungimi pare mai mari decât 2), cu muchiile colorate alternativ roșu/albastru. Atunci

- sau există cicluri, dar un ciclu γ este mulțime nulă, și este imediat vizibil că orice dreaptă din \mathbb{Z}^2 intersectează pe γ în 0 sau 2 puncte (deci întreg graful este un ciclu, din minimalitatea lui B);
- sau nu există cicluri; fie atunci un lanț $\lambda \subset B$
 - când capetele lui λ se află pe o dreaptă din \mathbb{Z}^2 , atunci λ ar fi mulțime nulă, contrazicând minimalitatea lui B ;
 - când capetele lui λ nu se află pe o dreaptă din \mathbb{Z}^2 , atunci $\emptyset \neq B \setminus \lambda$ ar fi mulțime admisibilă, contrazicând minimalitatea lui B .

(b) Pare o naivitate de exprimare a se referi la o submulțime **proprie** nulă; mulțimea $A = \{0, 1\}^3$ este astfel (conform cu observația de la începutul soluției, se poate lua A ca fiind orice submulțime nulă minimală finită).⁵

Îmi pare clar, mai ales în lumina metodei de la (a), că se intenționa găsirea unei mulțimi admisibile A fără submulțimi nule, **ea însăși nefiind nulă** (un model este destul de voluminos și greu de exhibat). Oare cum se face că nu există scoruri mai mari decât 4 (cu o excepție 5)? se poate deduce că 4 puncte se atribuiau punctului (a); oare nimeni n-a realizat că punctul (b), așa cum a fost enunțat, era trivial? sau, de fapt, punctul (b) a fost corectat **așa cum era el intenționat?** \square

3. AL TREILEA TEST DE SELECȚIE – SENIORI

Subiectul (1). Fie γ și γ' două cercuri care se intersectează în punctele A și B . Tangenta în A la cercul γ' intersectează a doua oară cercul γ în punctul C , tangenta în A la cercul γ intersectează a doua oară cercul γ' în punctul C' , iar dreapta CC' separă punctele A **and** și B .

Fie Γ cercul tangent exterior cercului γ , tangent exterior cercului γ' și tangent dreptei CC' , situat de aceeași parte a acestei drepte cu punctul B . Arătați că cercurile γ și γ' interceptează segmente de lungimi egale pe una dintre tangentele din punctul A la cercul Γ .

Remarcă. Ca de cele mai multe ori, fără comentarii pentru geometrie.

⁵ Iar dacă modificatorul **proprie** a fost **în mod intenționat** introdus, în chiar ultimul moment, pentru a "ușura" întrebarea, rezultatul obținut este ridicul.

Există mulțimi nule minimale **infinite**; de exemplu mulțimea

$$N_\omega = \{(0, 0)\} \cup \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(n+1, n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Subiectul (2). Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ și $(b_n)_{n \geq 0}$ două șiruri de numere reale, astfel încât $a_0 > 1/2$, $a_{n+1} \geq a_n$ și $b_{n+1} = a_n(b_n + b_{n+2})$, oricare ar fi numărul natural n . Arătați că șirul $(b_n)_{n \geq 0}$ este mărginit.

Remarcă. O problemă mult mai bine adaptată unui concurs de tip Putnam. Metodele sunt tipice domeniului analizei matematice. Doar cinci scoruri de 1, iar restul 0 (chiar și mai potrivit pentru o bună selecție, eh?).

Subiectul (3). Dacă n și k sunt numere naturale nenule, și $k \leq n$, notăm cu $M(n, k)$ cel mai mic multiplu comun al numerelor $n, n-1, \dots, n-k+1$; fie în cele ce urmează $f(n)$ cel mai mare număr natural nenul $k \leq n$, astfel încât $M(n, 1) < M(n, 2) < \dots < M(n, k)$. Arătați că:

(a) $f(n) < 3\sqrt{n}$, oricare ar fi numărul natural nenul n ; și

(b) Dacă N este un număr natural nenul, atunci $f(n) > N$, cu excepția unui număr finit de valori ale lui n .

Soluție. Avem evident $f(1) = f(2) = 1$, $f(3) = 2$; fie în continuare $n \geq 4$.

(a) Fie întregul (unic) $m \geq 2$ astfel încât $m^2 \leq n < (m+1)^2$. Deoarece $m^2 - m = (m-1)m \mid (m^2 - 1)m^2$, rezultă

$$M(n, n - (m-1)m + 1) = M(n, n - (m-1)m),$$

deci $f(n) \leq n - (m-1)m$. Dar $n - (m-1)m < 3\sqrt{n}$ este echivalent cu $n - 3\sqrt{n} < (m-1)m$; pentru $n \leq 9$ acest lucru este trivial, iar pentru $n > 9$ funcția $n \mapsto n - 3\sqrt{n}$ este crescătoare, deci

$$n - 3\sqrt{n} < (m+1)^2 - 3(m+1) = (m-1)m - 2 < (m-1)m,$$

și inegalitatea $f(n) < 3\sqrt{n}$ este demonstrată.

Cu doar un mic efort suplimentar putem obține o margine sensibil mai bună. Să observăm că dacă $m^2 \leq n < m^2 + m$ atunci, exact ca mai sus, avem $f(n) \leq n - (m-1)m < (m^2 + m) - (m^2 - m) = 2m \leq 2\sqrt{n}$. Pe de altă parte, dacă $m^2 + m \leq n < (m+1)^2$ atunci, deoarece

$$m^2 - 1 = (m-1)(m+1) \mid (m^2 + m - 2)(m^2 + m),$$

rezultă

$$M(n, n - (m^2 - 1) + 1) = M(n, n - (m^2 - 1)),$$

deci $f(n) \leq n - (m^2 - 1)$. Dar $n - (m^2 - 1) < 2\sqrt{n}$ este echivalent cu $n - 2\sqrt{n} < m^2 - 1$; pentru $n \leq 4$ acest lucru este trivial, iar pentru $n > 4$ funcția $n \mapsto n - 2\sqrt{n}$ este crescătoare, deci

$$n - 2\sqrt{n} < (m+1)^2 - 2(m+1) = m^2 - 1,$$

și inegalitatea $f(n) < 2\sqrt{n}$ este demonstrată.⁶

⁶ Această margine $2\sqrt{n}$ este destul de bună pentru valori mici ale lui n ; de exemplu $f(13) = 7 < 7,2 \approx 2\sqrt{13}$. Pe de altă parte, evident $f(n^2) \leq n$, și pentru multe valori ale lui n avem chiar egalitate; oare este adevărat că acest lucru se întâmplă întotdeauna (probabil nu) și că deci asimptotica exactă folosește $\frac{1}{2}$ ca putere a lui n ?

(b) (M. Bocanu) Vom arăta că pentru orice $n > N! + N$ avem $f(n) > N$. Fie $2 \leq k \leq N + 1$. Dacă arătăm că $n - k + 1 \nmid (n - k + 2) \cdots (n - 1)n$, atunci evident și $M(n, k) > M(n, k - 1)$, căci $M(n, k - 1) \mid (n - k + 2) \cdots (n - 1)n$. Dar

$$(n - k + 2) \cdots (n - 1)n = \prod_{\ell=1}^{k-1} ((n - k + 1) + \ell) \equiv (k - 1)! \pmod{n - k + 1},$$

și cum $n - k + 1 > (k - 1)! > 0$, căci $n > N! + N \geq (k - 1)! + (k - 1)$, rezultă de fapt că $(k - 1)! \not\equiv 0 \pmod{n - k + 1}$, exact ceea ce doream.⁷ \square

Subiectul (4). *Date fiind două numere întregi $h \geq 1$ și $p \geq 2$, determinați numărul minim de perechi de adversari într-un parlament care are exact hp membri, dacă în orice partiție a parlamentului în h camere a câte p membri fiecare, (cel puțin) una dintre aceste camere conține (cel puțin) o pereche de adversari.*

Soluție. Modelul de graf complet h -multipartit $K_{\underbrace{p, p, \dots, p}_{\text{de } h \text{ ori}}}$ (în notația

lui R. Diestel) este doar un exemplu care arată cum o alegere **convenabilă**

de $M - 1 = \frac{h(h - 1)}{2} p^2$ muchii poate duce la o h -echipartiție fără muchii

în clasele partiției, și că M muchii, **oricum** ar fi ele alese, duc la (măcar) o muchie în (măcar) o clasă, pentru **orice** h -echipartiție. Dar M nu este răspunsul, căci nouă ni se cere să găsim numărul minim m de muchii care ele, **convenabil** alese, duc la (măcar) o muchie în (măcar) o clasă, pentru

orice h -echipartiție. Evident, numărul $m = \frac{h(h + 1)}{2} = ||K^{h+1}||$ (iarăși în notațiile lui R. Diestel) al muchiilor grafului $(h + 1)$ -complet conduce la concluzia dorită, și evident $m < M$ pentru $h > 1$.

Ar rămâne de arătat că, pentru **orice** alegere de $m - 1$ muchii, **există** o h -echipartiție fără muchii în clasele partiției (trivial, de exemplu, pentru $h = 2$). Ne-ar putea veni în ajutor următorul rezultat elementar

Proposition 5.2.1. (R. Diestel) Every graph G with $||G||$ edges satisfies $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2||G|| + \frac{1}{4}}$ (unde prin $\chi(G)$ este notat numărul cromatic al lui G).

Proof. Let c be a vertex colouring of G with $k = \chi(G)$ colours. Then G has at least one edge between any two colour classes; if not, we could have used the same colour for both classes. Thus $||G|| \geq \frac{1}{2}k(k - 1)$. Solving this inequality for k , we obtain the assertion claimed. \blacksquare

⁷ Să remarcăm, la soluția de la punctul (b), că $f(n) > 2$ pentru $n > 2! + 2 = 4$, dar $f(4) = 2$; la fel, $f(n) > 3$ pentru $n > 3! + 3 = 9$, dar $f(9) = 3$. În unele cazuri deci, rangul $N! + N$ este precis (dar $f(n) > 4$ pentru $n > 4! + 4 = 28$, iar $f(28) = 7$). Se pare că $f(n)$ nu devine crescătoare de la un rang încolo!

Dar pentru $\frac{1}{2}k(k-1) \leq \|G\| \leq m-1 = \frac{1}{2}h(h+1) - 1 < \frac{1}{2}(h+1)h$, rezultă imediat $\chi(G) = k \leq h$, ceea ce semnifică existența unei partiții fără muchii; dar aceasta nu este în mod necesar o h -echipartiție (preconizată), dacă p nu este suficient de mare față de h .

În fine, pentru $p \leq \frac{h+2}{2}$, numărul $\mu = p(h-1) + 1 = \|K_{1,p(h-1)+1}\|$ al muchiilor grafului stea conduce la concluzia dorită, și evident $\mu \leq m$. Pe de altă parte, pentru $p \geq \frac{h+2}{2}$ avem $\mu \geq m$, și concluzia pare a fi că numărul căutat este $\boxed{\min\{m, \mu\}}$ (într-adevăr chiar este! dar soluția (oficială) apare hidos de complicată).

Enunțul este lejer ambiguu în privința cuantificatorilor logici discutați mai sus; desigur, eminent corect astfel cum este dat, putea însă profita de o încercare de clarificare, cu tot pericolul unor redundanțe! dovadă numărul celor care poate "s-au păcălit". Un scor de 5, unul de 2, trei de 1 și restul 0 (o ultimă încercare – ratată, ca și celelalte semnalate mai sus – de bună selecție). \square

4. AL PATRULEA TEST DE SELECȚIE – SENIORI

Subiectul (1). Fie ABC și ABD două triunghiuri coplanare cu perimetrele egale. Dreptele-suport ale bisectoarelor interioare ale unghiurilor CAD și CBD se intersectează în punctul P . Arătați că unghiurile APC și BPD sunt congruente.

Remarcă. Ca de cele mai multe ori, fără comentarii pentru geometrie.

Subiectul (2). Dat fiind un număr întreg $k \geq 2$, determinați numărul maxim de divizori pe care îi poate avea coeficientul binomial $\binom{n}{k}$ printre numerele din intervalul $n - k + 1, \dots, n - 1, n$, când n parcurge mulțimea numerelor întregi mai mari sau egale cu k .

Soluție. Pentru $n = k!$ avem $\binom{k!}{k} = \binom{n}{k} = (n - k + 1) \cdots (n - 1)$, așadar găsim $k - 1$ divizori din intervalul dat (anume toți, mai puțin ultimul).

Polinomul de interpolare Lagrange $L(x) = \sum_{\ell=0}^{k-1} \prod_{j \neq \ell} \frac{x - j}{\ell - j}$ are proprietatea că $L(x) = 1$ pentru orice $x \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$; dat fiind că este de grad $\deg L \leq k - 1$, urmează că este polinomul constant egal cu 1. Dar atunci

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k} L(n) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} \prod_{j \neq \ell} \frac{n - j}{\ell - j} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \pm \binom{k-1}{\ell} \left(\frac{1}{n - \ell} \binom{n}{k} \right),$$

deci nu toate cele k valori $\frac{1}{n - \ell} \binom{n}{k}$ pot fi numere întregi, cu $0 \leq \ell \leq k - 1$.

Numărul maxim de divizori căutat este așadar $\boxed{k - 1}$. \square

Remarcă. Forma specială a acestui polinom de interpolare Lagrange este bine-cunoscută; tot ”trucul” este să-ți vină în minte, și să realizezi că poate trivializa problema. Destul de simpatic, ca aplicație.

Subiectul (3). Fie n un număr natural nenul. Dacă σ este o permutare a primelor n numere naturale nenule, notăm cu $S(\sigma)$ mulțimea tuturor

sumelor distincte de forma $\sum_{i=k}^{\ell} \sigma(i)$, unde $1 \leq k \leq \ell \leq n$.

(a) Dați un exemplu de permutare σ a primelor n numere naturale nenule, astfel încât $|S(\sigma)| \geq \lfloor (n+1)^2/4 \rfloor$.

(b) Arătați că $|S(\sigma)| > n\sqrt{n}/4\sqrt{2}$, oricare ar fi permutarea σ a primelor n numere naturale nenule.

Soluție. (a) Prin încercări, pare natural să lucrăm cu o permutare σ pentru care sumele parțiale să fie ușor de calculat și comparat. Permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ 1 & n & 2 & n-1 & 3 & n-2 & 4 & n-3 & \dots \end{pmatrix}$$

are astfel de proprietăți, și nu este greu de demonstrat că generează cel puțin $\lfloor (n+1)^2/4 \rfloor$ sume parțiale distincte. Ar fi fost interesant de găsit o

asimptotică de forma $\max_{\sigma \in S_n} |S(\sigma)| = Cn^2$, unde $C \leq \frac{1}{2}$ este o constantă reală pozitivă absolută, căci evident $|S(\sigma)| \leq \frac{1}{2}n(n+1)$.

(b) Acest punct este mult mai complicat, și probabil că n-a fost soluționat de nimeni. Aici soluția oficială menționează că autorul ajunge la asimptotica $\min_{\sigma \in S_n} |S(\sigma)| = cn^2$, unde c este o constantă reală pozitivă absolută. \square

5. AL CINCILEA TEST DE SELECȚIE – SENIORI

Subiectul (1). Fie ABC un triunghi. Fie P_1 și P_2 două puncte pe latura AB , astfel încât P_2 să fie situat pe segmentul BP_1 , iar segmentele AP_1 și BP_2 să fie congruente; în mod analog, Q_1 și Q_2 sunt două puncte pe latura BC , astfel încât Q_2 să fie situat pe segmentul BQ_1 , iar segmentele BQ_1 și CQ_2 să fie congruente. Segmentele P_1Q_2 și P_2Q_1 se intersectează în punctul R , iar cercurile P_1P_2R și Q_1Q_2R se intersectează a doua oară în punctul S , situat în interiorul triunghiului P_1Q_1R . Fie M mijlocul laturii AC . Arătați că unghiurile P_1RS și Q_1RM sunt congruente.

Remarcă. Ca de cele mai multe ori, fără comentarii pentru geometrie.

Subiectul (2). Fie n un număr întreg mai mare decât 1 și fie p un factor prim al lui n . Considerăm țările care au exact p regiuni și în fiecare regiune sunt exact n aeroporturi. Într-o fiecare astfel de țară, p companii aeriene operează numai zboruri interregionale, astfel încât între oricare două aeroporturi situate în regiuni diferite ale țării există un zbor direct dus-întors operat de către una dintre cele p companii aeriene.

Determinați cel mai mare număr întreg N care are proprietatea că în orice astfel de țară putem alege una dintre cele p companii aeriene și N dintre cele np aeroporturi, astfel încât să putem călători (nu neapărat direct) de la oricare dintre cele N aeroporturi alese la oricare altul dintre acestea, doar cu zboruri operate de compania aeriană aleasă.

Într-o clară terminologie de teoria grafurilor (enunțul, așa cum e dat, cere vreun sfert de oră doar să fie conceptualizat). Considerăm grafurile G complet p -echipartite, cu n vârfuri pe fiecare din cele p maluri. Muchiile lui G sunt colorate cu p culori. Determinați cel mai mare număr întreg N cu proprietatea că pentru orice astfel de graf G se pot alege N dintre cele np vârfuri, astfel încât graful indus de ele în G să fie conectat monocromatic.

Soluție. Am să las soluția oficială să se lupte cu a arăta, mai întâi printr-un exemplu (nu foarte greu de găsit) că $N \leq n$, și apoi (printr-un argument mai dificil) că $\max N = n$. \square

Subiectul (3). Fie $a_0 = 1$ și fie $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Fie m un număr natural nenul, fie p un număr prim, și fie q și r două numere naturale. Arătați că $a_{p^m q+r} \equiv a_{p^{m-1} q+r} \pmod{p^m}$.

Remarcă. De parcă Problema 2, Testul III, nu era de ajuns, o altă problemă mai potrivită pentru Putnam. Trecerea "seamless" de la șiruri de numere întregi la aplicații liniare din spațiul vectorial $\mathbb{R}[x]$ în \mathbb{R} este elegantă, dar n-are nimic de-a face cu un test de selecție OIM. Rezultatele vin să sprijine această remarcă; cinci scoruri din mulțimea $\{1, 2, 3\}$, și restul 0.

Comentariile mele la această serie de Teste de Selecție sunt cam "sărăcuțe" din punct de vedere matematic, dintr-un motiv foarte clar. Sunt în general dezacord cu tematica și alegerea majorității problemelor, și sstisit îndeajuns pentru a-mi pierde interesul de a le duce până la capăt. Voi aștepta cu mare curiozitate editarea **RMC 2015** pentru a afla, într-un final, sursa acestor probleme, dar aș putea face încă de pe acum câteva presupuneri probabil foarte corecte (oare câte au fost originale?) și dezamăgitoare. Un lucru este cert – comunitatea mondială, care lauda calitatea producțiilor românești, se îndreaptă acum, ca și mine, către, evident, constant bunele probleme rusești, dar și cele din SUA, Iran, Brazilia, și alte "lesser luminaries" (personal, cu o anume gelozie).

6. ÎNCHEIERE

Se pare totuși că măcar cineva citește aceste comentarii ale mele; link-ul către MASSEE de pe site-ul SSMR a fost corectat!

Enunțurile și soluțiile oficiale ale Testelor II și III au fost în fine postate ... deci moratoriumul de ținere în umbră a expirat (deși probabil există printre ele probleme de pe IMO ShortList 2014; era vorba mai ales de probleme din culisele RMM 2014).

Rezultatele acestor ultime două Teste de Selecție (și echipa OIM care a rezultat) **nu** par să justifice alegerea generală făcută asupra problemelor. Reiterez – a numi ”pregătire” un pachet de două lecții este pompos; seamănă cu războiul Anglo-Zanzibar ☹ Echipa putea fi mai puternică, dar la noi selecția se face cu rigla trasă între scorurile al șaselea și al șaptelea (când variabilitatea introdusă de proasta corectură este de cel puțin 5%), nu din și prin responsabilitatea și experiența selecționarilor. S-a mai văzut, și chiar deseori, în trecut ☹

Deși rezultatele detaliate au fost postate, pentru conformitate aceasta este situația finală, cu echipele OIM și Yak (Tuymaada (juniori) – Yakutia) evidențiate.

Nume	Oraș	Clasa	Total	Echipe
GOLOGAN Radu	București	Leader		OIM
GHERGHE Cătălin Liviu	București	Deputy		OIM
BĂLUNĂ Mihail	București	Observer A		OIM
SPĂTARU Ștefan	București	12	95	OIM
BOCANU Marius-Ioan	București	12	76	OIM
ANDRONACHE Teodor Andrei	București	11	78	OIM
DIACONU Simona	București	12	77	OIM
PIIU Andrei-Bogdan	Galați	12	72	OIM
BONCIOCAT Ciprian-Mircea	București	9	68	OIM
PLOSCARU Ioan Laurențiu	Rm. Vâlcea	11	66	
GRAUR Andrei Alexandru	București	11	58	
ION Filip	București	10	55	
PASCADI Alexandru	București	10	46	
TUDOSE Ștefan Rareș	București	10	45	
DOICA Mihnea Gabriel	București	9	44	Yak
TELEANU Cristian Florentin	Constanța	11	37	
TEODORESCU Ioana	București	10	37	
DIMA Andreea	București	9	26	Yak
POPA Ștefan-Cristian	București	9	24	Yak

(Pozițiile 2,3,4 pentru OIM sunt astfel probabil din acordarea de ultim moment a unor puncte suplimentare (meritate) lui Marius ☺).