

Problema 1

Arătați că numărul $\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$ este număr rațional.

Soluție. Notăm $x = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$. Trebuie să arătăm că $x \in \mathbb{Q}$. Cu ajutorul formulei $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, obținem $x^3 = 18 + 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 27 - 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 3(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 6) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0$ sau $x^2 + 3x + 6 = 0$. Având în vedere că $x \in \mathbb{R}$ și că a doua ecuație are $\Delta = -15 < 0$, rezultă că $x = 3$, deci $x \in \mathbb{Q}$.